Le processus AR(1)

Stéphane Adjemian

Université Maine, GAINS & CEPREMAP

30 mars 2008

- $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus autorégressif d'ordre un, on note AR(1), s'il est défini par :

$$y_t = \theta + \varphi y_{t-1} + \epsilon_t$$

où $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$ est l'innovation du processus (*ie* la part de y_t non prédictible à partir de $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$), et où les paramètres φ, θ et σ^2 sont respectivement dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.

- On suppose que $|\varphi| \leq 1$.

– Supposons que y_0, la condition intiale soit connue (déterministe).

– On cherche à calculer $\mathbb{E}[y_t]$ pour $t = 1, 2, \dots$

– On peut réécrire y_t en remplaçant y_{t-1} par sa définition :

$$y_t = \theta + \varphi\left(\theta + \varphi y_{t-2} + \epsilon_{t-1}\right) + \epsilon_t$$

soit de façon équivalente :

$$y_t = \theta(1 + \varphi) + \varphi^2 y_{t-2} + \varphi\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

– En itérant la substitution pour y_{t-2}, il vient :

$$y_t = \theta(1 + \varphi + \varphi^2) + \varphi^3 y_{t-3} + \varphi^2\epsilon_{t-2} + \varphi\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

– En itérant, par substitution arrière, jusqu'à atteindre la condition initiale y_0, il vient :

$$\begin{aligned} y_t = &\ \theta(1 + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^{t-1}) + \varphi^t y_0 \\ &+ \varphi^{t-1}\epsilon_1 + \cdots + \varphi^2\epsilon_{t-2} + \varphi\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

ou de façon équivalente :

$$y_t = \theta \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i + \varphi^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \epsilon_{t-i}$$

ou encore si φ est strictement inférieur à un en valeur absolue (on reconnaît une série géométrique) :

$$y_t = \theta \frac{1 - \varphi^t}{1 - \varphi} + \varphi^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \epsilon_{t-i}$$

– Par linéarité de l'espérance, et puisque les deux premiers termes sont déterministes, nous avons :

$$\mathbb{E}\left[y_t\right] = \theta\frac{1-\varphi^t}{1-\varphi} + \varphi^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1}\varphi^i\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-i}\right]$$

– Puisque ϵ_t est un bruit blanc d'espérance nulle, il vient finalement :

$$\mathbb{E}\left[y_t\right] = \theta\frac{1-\varphi^t}{1-\varphi} + \varphi^t y_0$$

– L'espérance est *généralement* une fonction du temps, mais on note qu'elle tend (de façon monotone si $0 \leq \phi < 1$) vers un niveau constant :

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[y_t\right] = \frac{\theta}{1-\varphi}$$

– L'espérance est nulle si et seulement si $\theta = 0$ (il s'agit du cas vu en cours).

– Il est important de noter qu'il existe un cas où l'espérance ne dépend pas du temps. En effet, si $y_0 = \theta/1-\varphi$ alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[y_t\right] &= \theta\frac{1-\varphi^t}{1-\varphi} + \varphi^t\frac{\theta}{1-\varphi} \\
&= \theta\frac{1-\varphi^t+\varphi^t}{1-\varphi} \\
&= \frac{\theta}{1-\varphi}
\end{aligned}$$

– Pour bien comprendre cette propriété, notons qu'en posant $\mu_t = \mathbb{E}[y_t]$ et en appliquant l'opérateur espérance à la définition du processus nous avons :

$$\mu_t = \theta + \varphi\mu_{t-1} + \mathbb{E}[\epsilon_t]$$

ou encore puisque ϵ_t est centré :

$$\mu_t = \theta + \varphi\mu_{t-1}$$

– Le point fixe (*ie* la valeur de μ constante telle que l'équation précédante est vérifiée, ou pour utiliser le vocabulaire du cours de croissance : l'état stationnaire) de cette récurrence est :

$$\mu = \frac{\theta}{1-\varphi}$$

- Si la condition initiale est égale au point fixe de la récurrence définissant la dynamique de l'espérance de y_t alors l'espérance est invariante (elle ne dépend pas du temps).

- Notons que dans le cas où $\varphi = 1$ il n'est pas possible de trouver une condition initiale telle que l'espérance est constante.

- En effet, dans ce cas nous avons :

$$y_t = \theta \sum_{i=0}^{t-1} 1^i + 1^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} 1^i \epsilon_{t-i}$$

$$\Leftrightarrow y_t = \theta t + y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i}$$

– En appliquant l'opérateur espérance on trouve directement :

$$\mathbb{E}\left[y_t\right] = y_0 + \theta t$$

L'espérance est une fonction affine du temps. Lorsque t tend vers l'infini l'espérance diverge (vers plus ou moins l'infini selon le signe de θ).

– Calculons la variance de y_t. À nouveau, nous allons voir que celle-ci dépend du temps mais qu'elle converge vers un niveau constant dès lors que φ est strictement inférieur à un en valeur absolue.

– Par définition, nous avons : $\mathbb{V}\left[y_t\right] = \mathbb{E}\left[\left(y_t - \mathbb{E}\left[y_t\right]\right)^2\right]$

- On se concentre tout d'abord sur le cas où $|\varphi| < 1$.
- Commençons par donner une expression pour le processus centré :

$$y_t - E\left[y_t\right] = \theta \frac{1-\varphi^t}{1-\varphi} + \varphi^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \epsilon_{t-i} - \theta \frac{1-\varphi^t}{1-\varphi} - \varphi^t y_0$$

$$\Leftrightarrow y_t - E\left[y_t\right] = \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \epsilon_{t-i}$$

- Nous avons alors :

$$\left(\sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \epsilon_{t-i} \right)^2 = \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{t-1} \varphi^i \epsilon_{t-i} \varphi^j \epsilon_{t-j} = \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{t-1} \varphi^{i+j} \epsilon_{t-i} \epsilon_{t-j}$$

– Il ne nous reste plus qu'à appliquer l'opérateur espérance à la double somme pour obtenir la variance de y_t.

– Par linéarité de l'opérateur espérance, nous avons :

$$\mathbb{V}\left[y_t\right] = \sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-1}\varphi^{i+j}\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-j}\right]$$

– L'innovation ε_t est un bruit blanc d'espérance 0 et de variance σ^2, nous avons donc :

$$\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-j}\right] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi de nombreux termes sont nuls dans la double somme.

– Nous avons :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}[y_t] &= \sum_{i=0 \text{ et } j=i}^{t-1} \varphi^{i+j}\mathbb{E}[\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-j}] \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^{2i}\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-i}^2\right] \\
&= \sigma^2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\varphi^2\right)^i \\
&= \sigma^2 \frac{1-\varphi^{2t}}{1-\varphi^2}
\end{aligned}
$$

– La variance dépend du temps, mais on note qu'elle tend (si comme nous l'avons implicitement supposé dans le calcul de la série géométrique) vers un niveau constant :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{V}\left[y_t\right] = \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$$

– Asymptotiquement, la variance de y_t est d'autant plus importante que :

1. La « taille » de l'innovation est grande (σ^2 grand).
2. Le processus est persistant (*ie* φ proche de 1).

– On peut trouver un cas où la variance est constante.

– Nous avons supposé que y_0 est déterministe, c'est-à-dire que la condition initiale est une variable aléatoire de variance nulle.

– Par analogie avec ce que nous avons vu pour l'espérance, si nous choisissons pour condition initiale une variable aléatoire d'espérance ${}^{\sigma^2}\!/_{1-\varphi^2}$ (la variance de y_t lorsque t tend vers ∞) alors on peut montrer que la variance de y_t devient invariante (on suppose aussi que y_0 est indépendant des innovations $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_t$ et que $\mathbb{E}\left[y_0\right] = {}^{\theta}\!/_{1-\varphi}$).

– En effet, dans ce cas on montre facilement que :

$$y_t - \mathbb{E}_t\left[y_t\right] = \varphi^t \tilde{y}_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \epsilon_{t-i}$$

où $\tilde{y}_0$ est la condition initiale centrée ($\tilde{y}_0 = y_0 - {}^{\theta}/_{1-\varphi}$).

– En élevant au carré puis en appliquant l'espérance, par linéarité de l'espérance et orthogonalité entre la condition initiale et les innovations il vient :

$$\mathbb{V}\left[y_t\right] = \varphi^{2t}\frac{\sigma^2}{1-\varphi^2} + \sigma^2\frac{1-\varphi^{2t}}{1-\varphi^2}$$

– En regroupant les deux termes, on obtient finalement :

$$\mathbb{V}\left[y_t\right] = \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2} \quad \text{pour tout } t.$$

– Comme pour l'espérance on peut obtenir l'intuition de ce résultat en écrivant une équation récurrente pour la variance de y_t. La variance asymptotique est le point fixe cette récurrence[a].

– Il est important de noter que dans le cas où $\varphi = 1$, on ne peut exhiber une condition initiale telle que la variance est constante. Dans ce cas, on montre même que la variance est une fonction linéaire (ou affine si la variance de la condition initiale est strictement positive) du temps.

[a] Si on note γ_t la variance de y_t alors cette récurrence est donnée par $\gamma_t = \varphi^2\gamma_{t-1} + \sigma^2$. Pour écrire cette équation il suffit de ne pas oublier que y_{t-1} et orthogonale à l'innovation ϵ_t et d'appliquer l'opérateur variance à la définition du processus AR(1).

– Si $\varphi = 1$ on sait que :

$$y_t = \theta t + y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i}$$

Supposons que la condition initiale soit une variable aléatoire de variance γ_0.

– Sachant que $\epsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$ et que la somme de v.a. orthogonales est la somme des variances des v.a., on montre facilement que (en n'oubliant pas que la condition initiale est orthogonale aux innovations) :

$$\mathbb{V}[y_t] = \gamma_0 + t\sigma^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

– Résumons les résultats :

  – Si $|\varphi| < 1$ alors la variance et l'espérance varient généralement dans le temps (sauf pour un choix particulier de la condition initiale) mais tendent vers des niveaux constants :

$$\mathbb{E}\left[y_t\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\theta}{1-\varphi} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\left[y_t\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$$

  – Si $\varphi = 1$ alors la variance et l'espérance varient dans le temps et on ne peut trouver une condition initiale telles que ces moments sont invariants. Asymptotiquement ces moments ne sont pas définis (ils tendent vers l'infini).

Définition. On dit d'un processus qu'il asymptotiquement stationnaire au second ordre si on peut exhiber une condition initiale telle que les moments d'ordre un et deux du processus sont invariants.

- Le processus AR(1) est asymptotiquement stationnaire au second ordre dès lors que le paramètre autorégressif est inférieur à un en valeur absolue.
- Nous n'avons pas calculé la fonction d'autocovariance $\gamma(h) = \mathbb{E}\left[(y_t - \mathbb{E}\left[y_t\right])\left(y_{t+h} - \mathbb{E}\left[y_{t+h}\right]\right)\right]$ mais nous pourrions facilement montrer que celle-ci ne dépend pas de t dès lors que $|\varphi| < 1$ et que la distribution initiale est correctement choisie.

– La représentation "naturelle" du processus AR(1) exprime y_t en fonction de son passé (y_{t-1}) et de l'innovation ϵ_t (la partie de y_t non prédictible en utilisant son passé, *ie* y_{t-1}) :

$$y_t = \theta + \varphi y_{t-1} + \epsilon_t$$

– On peut écrire de façon équivalente ce processus en exprimant y_t en fonction de sa condition initiale, d'une fonction du temps et d'une combinaison linéaire des innovations passées :

$$y_t = \theta \frac{1 - \varphi^t}{1 - \varphi} + \varphi^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i \epsilon_{t-i}$$

– En supposant que le processus soit asymptotiquement stationnaire au second ordre, c'est-à-dire en supposant que $|\varphi| < 1$, nous pouvons aller encore plus loin dans le passé (plutôt que de s'arrêter à y_0 nous allons jusqu'à $y_{-\infty}$) :

$$y_t = \theta \lim_{t\to\infty} \frac{1-\varphi^t}{1-\varphi} + y_{-\infty} \lim_{t\to\infty} \varphi^t + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \epsilon_{t-i}$$

– Puisque $\lim_{t\to\infty} \varphi^t = 0$, il vient :

$$y_t = \frac{\theta}{1-\varphi} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \epsilon_{t-i}$$

Il s'agit de la représentation MA(∞) du processus AR(1) (MA $\rightarrow$ de l'anglais Moving Average).

– La représentation MA(∞) est la somme de l'espérance et d'une combinaison linéaire des innovations passées.
– La forme MA(∞) peut s'interpréter comme la solution de l'équation récurrente stochastique définie par la repésentation AR(1). En effet si on substitue la représentation MA(∞) dans la représentation AR(1) :

$$
\begin{aligned}
\frac{\theta}{1-\varphi} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \epsilon_{t-i} &= \theta + \frac{\varphi\theta}{1-\varphi} + \varphi \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \epsilon_{t-1-i} + \epsilon_t \\
&= \frac{\theta}{1-\varphi} + \varphi(\epsilon_{t-1} + \varphi\epsilon_{t-2} + \varphi^2\epsilon_{t-3} + \dots) + \epsilon_t \\
&= \frac{\theta}{1-\varphi} + (\varphi\epsilon_{t-1} + \varphi^2\epsilon_{t-2} + \varphi^3\epsilon_{t-3} + \dots) + \epsilon_t \\
&= \frac{\theta}{1-\varphi} + \epsilon_t + \varphi\epsilon_{t-1} + \varphi^2\epsilon_{t-2} + \varphi^3\epsilon_{t-3} + \dots \\
&= \frac{\theta}{1-\varphi} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \epsilon_{t-i}
\end{aligned}
$$

– En supposant que $|\varphi| < 1$, on peut calculer les moments (asymptotiques) de l'AR(1) à partir de la solution MA(∞).

– Pour l'espérance le calcul est directe :

$$\mathbb{E}\left[y_t\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\theta}{1-\varphi} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \epsilon_{t-i}\right] = \frac{\theta}{1-\varphi} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \mathbb{E}\left[\epsilon_{t-i}\right] = \frac{\theta}{1-\varphi}$$

– La variance est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left[y_t\right] = \mathbb{E}\left[\left(y_t - \mathbb{E}\left[y_t\right]\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \epsilon_{t-i}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{i+j} \epsilon_{t-i}\epsilon_{t-j}\right]\end{aligned}$$

– Par linéarité de l'espérance et en utilisant les propriétés de ϵ_t (un bruit blanc), il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[y_t] &= \sum_{i=0 \text{ et } j=i}^{\infty} \varphi^{i+j}\mathbb{E}[\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-j}] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{2i}\sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}\end{aligned}$$

– L'autocovariance d'ordre h est définie par :

$$\gamma(h) = \mathbb{E}\left[(y_t - \mathbb{E}[y_t])(y_{t+h} - \mathbb{E}[y_{t+h}])\right]$$

– En substituant la solution MA(∞) il vient :

$$\gamma(h) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^{i}\epsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\varphi^{j}\epsilon_{t+h-j}\right)\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\varphi^{i+j}\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-i}\epsilon_{t+h-j}\right]$$

– L'espérance de $\epsilon_{t-i}\epsilon_{t+h-j}$ est non nulle (égale à σ^2) ssi $t-i=t+h-j$ ou de façon équivalente $j=i+h$. Ainsi :

$$\gamma(h) = \sum_{i=0 \text{ et } j=i+h}^{\infty}\varphi^{i+j}\sigma^2$$
$$= \varphi^{h}\sigma^2\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^{2i}$$
$$= \frac{\sigma^2\varphi^h}{1-\varphi^2}$$

– Il est possible de calculer les moments (asymptotiques) du processus sans passer par la solution MA(∞) et les sommes infinies.
– En supposant toujours que $|\varphi| < \infty$, posons μ et $\gamma(h)$ ($h \in \mathbb{Z}$) l'espérance et la fonction d'autocovariance de $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$.
– Nous avons en appliquant l'opérateur espérance :

$$\begin{aligned} y_t &= \theta\varphi y_{t-1} + \epsilon_t \\ \Rightarrow \mathbb{E}\left[y_t\right] &= \theta\varphi\mathbb{E}\left[y_{t-1}\right] + \mathbb{E}\left[\epsilon_t\right] \\ \Leftrightarrow \mu &= \theta + \varphi\mu \\ \Leftrightarrow \mu &= \frac{\theta}{1-\varphi} \end{aligned}$$

– Pour le calcul de $\gamma(0)$ (la variance) nous devons travailler à partir du processu centré. Nous avons :

$$y_t = \theta + \varphi y_{t-1} + \epsilon_t$$
$$\Leftrightarrow y_t = \mu(1-\varphi) + \varphi y_{t-1} + \epsilon_t$$

par définition de l'espérance. De façon équivalente, nous avons :

$$y_t - \mu = \varphi\left(y_{t-1} - \mu\right) + \epsilon_t$$
$$\Leftrightarrow \tilde{y}_t = \varphi \tilde{y}_{t-1} + \epsilon_t$$

où $\{\tilde{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est le processus centré (les moments d'ordre 2 de $\{\tilde{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sont identiques).

– Pour donner une expression de $\gamma(0)$, notons que :

$$\tilde{y}_t = \varphi \tilde{y}_{t-1} + \epsilon_t$$
$$\Leftrightarrow \tilde{y}_t^2 = \varphi \tilde{y}_{t-1}\tilde{y}_t + \tilde{y}_t\epsilon_t$$

– En appliquant l'opérateur espérance et par définition de la fonction d'autocovariance, il vient :

$$\gamma(0) = \varphi\gamma(1) + \mathbb{E}\left[y_t\epsilon_t\right]$$
$$\gamma(0) = \varphi\gamma(1) + \mathbb{E}\left[\left(\varphi y_{t-1} + \epsilon_t\right)\epsilon_t\right]$$
$$\gamma(0) = \varphi\gamma(1) + \mathbb{E}\left[\epsilon_t\epsilon_t\right]$$
$$\gamma(0) = \varphi\gamma(1) + \sigma^2$$

une expression de $\gamma(0)$ en fonction de σ^2 et de $\gamma(1)$. Calculons $\gamma(1)$...

– Pour donner une expression de $\gamma(1)$, notons que :

$$\tilde{y}_t = \varphi\tilde{y}_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \tilde{y}_t y_{t-1} = \varphi\tilde{y}^2_{t-1} + \tilde{y}_{t-1}\epsilon_t$$

– En appliquant l'opérateur espérance et par définition de la fonction d'autocovariance, il vient :

$$\gamma(1) = \varphi\gamma(0) + \mathbb{E}\left[y_{t-1}\epsilon_t\right]$$

$$\gamma(1) = \varphi\gamma(0)$$

une expression de $\gamma(1)$ en fonction de $\gamma(0)$. Nous avons donc deux équations pour deux inconnues :

$$\begin{cases} \gamma(0) & = \varphi\gamma(1) + \sigma^2 \\ \gamma(1) & = \varphi\gamma(0) \end{cases}$$

– En substituant la deuxième équation dans la première, on trouve :

$$\begin{cases} \gamma(0) & = \varphi\gamma(1) + \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2} \\ \gamma(1) & = \varphi\gamma(0) \end{cases}$$

– Plus généralement on montre que $\gamma(h) = \varphi\gamma(h-1)$ ou que $\gamma(h) = \varphi^h\gamma(0)$