CROISSANCE

UNIVERSITÉ DU MAINE (DS1, L3)

Soit $K(t)$ le stock de capital physique d'une économie, $L(t)$ la population qui croît au taux constant $n > 0$, $\alpha \in]0,1[$ la part du capital dans le produit, $s \in]0,1[$ le taux d'épargne et $\delta > 0$ le taux de dépréciation du capital physique. La dynamique du capital physique agrégé est décrite par :

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

et la technologie de production est de type Cobb - Douglas :

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$$

(1) Écrivez l'équation différentielle qui décrit la loi d'évolution du capital physique par tête. Interprétez cette équation.
Écrivons la loi d'évolution du capital par tête $k(t) = K(t)/L(t)$. Commençons par diviser les deux membres de l'équation décrivant l'évolution du stock de capital agrégé dans l'économie par le nombre de tête $L(t)$:

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\frac{Y}{L} - \delta\frac{K}{L}$$

En substituant la définition de la technologie et en notant que $\alpha + 1 - \alpha = 1$, il vient :

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L^{\alpha+(1-\alpha)}} - \delta k$$

soit de façon équivalente :

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} - \delta k$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{L} = sk^{\alpha} - \delta k \tag{1}$$

Nous cherchons à décrire la loi d'évolution de k. Dans la dernière équation, le capital intensif apparaît bien en niveau sur le membre de droite, mais dans le membre de gauche nous avons la variation du stock de capital agrégé rapporté à la taille de la population alors que nous aimerions avoir la variation du capital par tête. Par définition du capital par tête, nous avons :

$$\dot{k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{K}{L}\right)$$

en vertu des formules usuelles de dérivation, il vient :

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}L}{L^2} - \frac{K\dot{L}}{L^2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L}$$

$$\Leftrightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

car la population croît au taux constant n. Nous pouvons donc exprimer la variation du stock de capital agrégé rapporté à la taille de la population en fonction de la variation du stock de capital intensif et du niveau du stock de capital intensif. Par substitution dans l'équation 1 il vient :

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n+\delta)k$$

Cette équation différentielle non linéaire décrit l'évolution du stock de capital par tête dans l'économie. Le stock de capital par tête s'accroît si et seulement si l'investissement par tête est suffisant pour « couvrir » la dépréciation du capital intensif.

(2) Déterminez l'état stationnaire de l'économie intensive (on notera k^*, y^* et c^* les niveaux de long terme du capital par tête, du produit par tête et de la consommation par tête).
L'état de cette économie est complètement décrit par le capital intensif (si on connaît k on peut déterminer le produit par tête, y, via la fonction de production, la consommation par tête, c, via la règle $c = (1-s)y$ et par complémentarité l'investissement par tête, $i = sy$). L'économie est à son état stationnaire lorsque les variables intensives ne varient plus, c'est-à-dire lorsque le capital par tête ne varie plus (puisque cette variable « résume »

l'ensemble de l'économie). Formellement, on cherche le niveau de capital par tête k^* tel que $\dot{k}$ soit nul, c'est-à-dire tel que :

$$s\left[k^*\right]^\alpha = (n+\delta)k^*$$

À l'état stationnaire, le volume de l'investissement en capital physique par tête doit égaliser la dépréciation du capital physique par tête. Une première solution triviale est $k^* = 0$. On ne considère pas cette solution car il s'agit d'une situation dégénérée, dans le sens où l'économie n'existe pas à l'état stationnaire (toutes les variables sont nulles). De plus on peut montrer que cet état stationnaire, qualifié de trivial, n'est pas stable dans ce modèle. Après une variation infinitésimale du stock de capital physique par tête, on ne revient jamais à l'état stationnaire trivial[1]. Si $k^* > 0$, en divisant les deux membres de l'équation par $[k^*]^\alpha$, il vient :

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

En substituant dans la technologie intensive Cobb-Douglas, on obtient directement le niveau d'état stationnaire du produit par tête :

$$y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Sachant que le niveau de la consommation est une fraction constante, $1-s$, du produit, on obtient l'état stationnaire de la consommation :

$$c^* = (1-s)\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

On voit qu'une augmentation permanente du taux d'épargne déplace vers le haut le niveau de long terme[2] du capital physique et du produit intensifs. Dans une économie où les ménages accumulent plus de capital, on atteint un niveau de long terme plus élevé.

(3) Montrez que le taux d'épargne qui maximise le niveau de la consommation par tête à long terme, le taux d'épargne dit de la règle d'or, est : $s_{\text{or}} = \alpha$. Montrez que, dans ce cas, le rendement du capital par tête net de la dépréciation effective du capital par tête doit être nul à long terme.

[1] Vous pouvez établir ce point graphiquement.

[2] Ici on parle indifféremment de niveau de long terme et d'état stationnaire car celui-ci est globalement stable (ce que vous pouvez également établir graphiquement).

On notera k^*_{or}, y^*_{or} et c^*_{or} les niveaux de long terme du capital par tête, du produit par tête et de la consommation par tête dans le cas de la règle d'or. En particulier on a :

$$c^*_{\text{or}} = (1-\alpha)\left[\frac{\alpha}{n+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Une augmentation du taux d'épargne a un effet ambigu sur le niveau de long terme de la consommation. Considérons deux cas polaires. Si $s = 1$ alors la consommation est toujours nulle. A fortiori elle doit être nulle à l'état stationnaire. Si $s = 0$, alors le stock de capital intensif décroît à chaque instant car l'investissement est toujours nul. Le taux de décroissance de k est constant et déterminé par le taux de dépréciation du capital par tête $(n+\delta)$. Pendant la transition le niveau de la consommation est positif, mais à long terme la consommation devient nulle car le le capital et produit intensifs tendent vers zéro.

Imaginons que nous dévions marginalement de ces deux cas polaires. Plaçons nous dans le cas où la totalité du revenu est épargnée ($s = 1$). Si on diminue de façon infinitésimale le taux d'épargne alors, même si cela va contribuer à diminuer le niveau de long terme de k et y, cela va induire une augmentation (infinitésimale) de la consommation à long terme. Dans ce cas une diminution du taux d'épargne induit une augmentation de la consommation à long terme. Envisageons le cas symétrique où la totalité du revenu est consommée à chaque instant ($s = 0$). Une augmentation infinitésimale du taux d'épargne nous permet de définir un état stationnaire non trivial, où le produit sera strictement positif, vers lequel l'économie va se diriger. Ainsi en augmentant le taux d'épargne on crée un « gâteau » à long terme, que le ménage pourra partager entre épargne et consommation. Une augmentation infinitésimale du taux d'épargne induit une augmentation infinitésimale de la consommation à long terme.

Au total on comprend pourquoi l'effet d'une variation du taux d'épargne induit un effet ambigu sur la consommation à long terme. Quand s est proche de 1, le modèle prédit une relation décroissante entre le taux d'épargne et la consommation à long terme. Quand s est proche de 0, le modèle prédit une relation croissante entre le taux d'épargne et la consommation à long terme. Tout ceci suggère qu'il pourrait exister un taux d'épargne optimal, au sens de la maximisation du niveau de la consommation par tête à long terme, entre 0 et 1. C'est ce que nous nous proposons d'établir ici. Posons la consommation intensive à l'état stationnaire comme une fonction du taux d'épargne :

$$c^*(s) = (1-s)\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

On définit formellement le taux d'épargne de la règle d'or, s_{or}, de la façon suivante :

$$s_{\text{or}} = \arg\max_{s} c^{*}(s)$$

La condition nécessaire d'optimalité associée à ce programme est :

$$-\left(\frac{s_{\text{or}}}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{(1-s_{\text{or}})}{n+\delta}\left(\frac{s_{\text{or}}}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} = 0$$

En excluant le cas où $s_{\text{or}} = 0$ (il s'agit d'un des deux cas polaires, évoqués plus haut, pour lequel on atteint le plus faible niveau possible de consommation à long terme), on peut diviser les deux membres de cette équation par le premier terme du membre de gauche. On obtient :

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{(1-s_{\text{or}})}{n+\delta}\left(\frac{s_{\text{or}}}{n+\delta}\right)^{-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-s_{\text{or}})}{s_{\text{or}}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow s_{\text{or}} = \alpha$$

notre candidat pour le taux d'épargne de la règle d'or. Nous venons de montrer qu'il existe une unique valeur de s pour laquelle la dérivée de $c^{*}(s)$ est nulle. Il nous reste à montrer que nous avons bien maximisé une fonction. La preuve est directe. Il suffit de noter que nous pouvons reprendre les quatres équations précédentes en remplaçant "=" par ">" ou "<". On voit alors directement que la dérivée est positive si et seulement si le taux d'épargne est inférieur à la part du capital dans la valeur ajoutée. Autrement dit la courbe représentative de la fonction $c^{*}(s)$ est nulle en zéro et en un, pour le reste elle a la forme d'un bol inversé. Ces signes de la dérivée sont conformes avec l'analyse à proximité des cas polaires évoqués plus haut. Pour conclure, $s_{\text{or}} = \alpha$ est bien le taux d'épargne de la règle d'or. On obtient les niveaux de long terme des variables intensives en remplaçant s par s_{or} dans les expressions de k^{*}, y^{*} et c^{*}. En particulier, nous obtenons :

$$c^{*}_{\text{or}} = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Pour interpréter notre résultat, on peut réécrire la définition de l'état stationnaire du capital physique intensif de la règle d'or de la façon suivante[3] :

$$\alpha\left[k^{*}_{\text{or}}\right]^{1-\alpha} = n+\delta$$

[3]En remplaçant s par α.

Le terme sur le membre de droite s'interprète comme le rendement du capital par tête (la productivité marginale) à l'état stationnaire de la règle d'or. De façon équivalente, on a :

$$\alpha\left[k^*_{\text{or}}\right]^{1-\alpha}-(n+\delta)=0$$

Notre résultat devient transparent. Le taux d'épargne de la règle d'or, c'est le taux qui permet d'annuler le rendement du capital intensif net de sa dépréciation. Imaginons que le ménage représentatif puisse choisir son comportement d'accumulation, *ie* la valeur de s, sur des considérations de long terme. Supposons que le rendement net du capital soit négatif à long terme. Cette situation apparaît lorsque $s>\alpha$. En effet, dans ce cas $k^*>k^*_{\text{or}}$ et, en vertu de l'hypothèse de rendements décroissants du capital, on a immédiatement :

$$s\left[k^*\right]^{1-\alpha}-(n+\delta)<\alpha\left[k^*_{\text{or}}\right]^{1-\alpha}-(n+\delta)=0$$

Si le ménage ne se préoccupe seulement que de ce qu'il peut gagner ou perdre à long terme, il est alors incité à réduire son taux d'épargne. Cela se traduit par une baisse du niveau de long terme du capital intensif et, à nouveau par l'hypothèse de rendements décroissants du capital[4], une augmentation du rendement net du capital intensif à long terme. Il va réduire son taux d'épargne tant que le rendement net du capital intensif à long terme est négatif. Par symétrie, si le rendement net du capital intensif est positif à long terme, alors le ménage est incité à augmenter son taux d'épargne, puisqu'il obtient alors un bénéfice. Il va augmenter son taux d'épargne tant que le rendement net du capital intensif est strictement positif. Ainsi, on comprend bien que le meilleur choix pour le ménage est d'accorder son comportement d'accumulation de façon à annuler le rendement net du capital intensif.

(4) On suppose l'existence d'un gouvernement qui taxe proportionnellement les revenus des ménages et alloue le montant de l'impôt à l'accumulation du capital. L'équation d'évolution du capital agrégé devient :

$$\dot{K}(t)=s(1-\tau)Y(t)+\tau Y(t)-\delta K(t)$$

où $\tau\in[0,1]$ est le taux d'imposition. Montrez que l'équation d'évolution du capital par tête devient :

$$\dot{k}(t)=(s+\tau(1-s))k(t)^{\alpha}-(n+\delta)k(t)$$

[4]Le terme $\alpha\left[k^*\right]^{1-\alpha}$ est une fonction décroissante de k^*.

Interprétez cette équation.
On suppose l'existence d'un gouvernement qui taxe proportionnellement les revenus des ménages et alloue le montant de l'impôt à l'accumulation du capital. L'équation d'évolution du capital agrégé devient :

$$\dot{K}(t) = s(1-\tau)Y(t) + \tau Y(t) - \delta K(t)$$

où $\tau \in [0,1]$ est le taux d'imposition. En regroupant les termes en $Y(t)$, il vient :

$$\dot{K} = (s + \tau(1-s))Y - \delta K$$

Le stock de capital agrégé augmente si et seulement si l'investissement effectif est supérieur à la dépréciation du capital. L'investissement effectif est composé de l'investissement « choisi »[5] par le ménage représentatif sur la base de son revenu disponible, $s(1-\tau)Y$, et de l'investissement induit par la politique fiscale de l'état, τY[6]. En posant $s_\tau = s + \tau(1-s)$ le taux d'épargne effectif (c'est-à-dire incluant l'effet « redistribution » de la politique fiscale), on peut poursuivre comme dans le modèle de Solow habituel :

$$\dot{K} = s_\tau Y - \delta K$$

Nous retrouvons donc directement le résultat habituel :

$$\dot{k}(t) = (s + \tau(1-s))k(t)^\alpha - (n+\delta)k(t)$$

Le stock de capital intensif augmente si et seulement si l'investissement (effectif) par tête couvre la dépréciation du capital intensif.

(5) Calculez le nouvel état stationnaire de l'économie intensive. En particulier vous établirez que :

$$c^* = (1-s)(1-\tau)\left[\frac{s + \tau(1-s)}{n+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Pour caractériser l'économie à l'état stationnaire il nous suffit de déterminer l'état stationnaire du capital physique intensif. En utilisant s_τ, le

[5]Dans le modèle de Solow, le comportement d'épargne est exogène ; le taux d'épargne n'est pas une variable de choix du ménage représentatif.

[6]Pour le dire autrement, en suivant la dernière équation, l'investissement effectif est composé de l'investissement que choisirait le ménage dans un monde sans politique fiscale, sY, et de l'investissement induit par la politique fiscale, $\tau(1-s)Y$, une partie de la consommation souhaitée et détournée par l'état vers l'accumulation de capital physique.

taux d'épargne effectif, au lieu de s on voit immédiatement que l'état stationnaire de k devient :

$$k^* = \left(\frac{s + \tau(1-s)}{n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

et en substituant dans la fonction de production :

$$y^* = \left(\frac{s + \tau(1-s)}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

La consommation à long terme est définie par la part non épargnée, $1-s$, du revenu disponible à long terme $(1-\tau)y^*$. À l'état stationnaire, nous devons avoir :

$$c^* = (1-s)(1-\tau) \left(\frac{s + \tau(1-s)}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

On obtient des résultats intuitifs par rapport à ce que nous avons l'habitude de voir. Une augmentation de la taxe, c'est-à-dire une augmentation du taux d'épargne effectif, induit une augmentation du niveau de long terme du capital et du produit intensifs. L'effet sur le niveau de long terme de la consommation est plus ambigu. Une augmentation de la taxe augmente certes le produit (ou le revenu) à long terme mais dans le même temps elle diminue la fraction du revenu que le ménage peut partager entre épargne et consommation. Selon les tailles respectives de ces deux effets le revenu disponible des ménages peut baisser ou augmenter. La consommation étant proportionnelle au revenu disponible, celle-ci peut baisser ou augmenter à long terme suite à une augmentation permanente du taux de taxe.

(6) On suppose que, dans le monde sans politique fiscale ($\tau = 0$), l'épargne des ménages est insuffisante pour atteindre le niveau de consommation à long terme le plus important possible ($s < \alpha$). Montrez qu'il existe un taux de taxe sur les revenus, $\bar{\tau}$, qui maximise le niveau de la consommation à long terme.

On suppose que dans le monde sans politique fiscale, le ménage sous accumule le capital : $s < s_{\text{or}} = \alpha$. On a vu dans notre réponse à la question précédente que l'effet d'une variation permanente du taux de taxe sur le niveau de la consommation par tête est ambigu. On veut montrer, par analogie avec le taux d'épargne de la règle d'or, qu'il existe un taux de taxe, strictement positif, qui maximise la consommation à long terme. Celui-ci est défini de la façon suivante :

$$\overline{\tau} = \arg\max_{\tau} c^*(\tau)$$

La condition nécessaire d'optimalité associée à ce programme est :

$$(1-s)\left[\frac{s+\overline{\tau}(1-s)}{n+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-s)(1-\overline{\tau})\left[\frac{s+\overline{\tau}(1-s)}{n+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{1-s}{n+\delta}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

En supposant que $\overline{\tau}$ est strictement positif (sinon il ne s'agit plus d'une taxe mais d'une subvention) $s+\overline{\tau}(1-s)$ est nécessairement positif et donc nous pouvons diviser les deux membre de cette égalité par le membre de gauche :

$$\begin{aligned}
1 = (1-\overline{\tau})\left[\frac{s+\overline{\tau}(1-s)}{n+\delta}\right]^{-1}\frac{1-s}{n+\delta}\frac{\alpha}{1-\alpha} \\
\Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{(1-\overline{\tau})(1-s)}{s+\overline{\tau}(1-s)} \\
\Leftrightarrow (1-\alpha)(s+\overline{\tau}(1-s)) = \alpha(1-\overline{\tau})(1-s) \\
\Leftrightarrow s+\overline{\tau}(1-s)-\alpha s-\alpha\overline{\tau}(1-s) = (\alpha-\alpha\overline{\tau})(1-s) \\
\Leftrightarrow s+\overline{\tau}(1-s)-\alpha s-\alpha\overline{\tau}(1-s) = \alpha-\alpha\overline{\tau}-s\alpha+s\alpha\overline{\tau} \\
\Leftrightarrow s+\overline{\tau}-\overline{\tau}s-\alpha s-\alpha\overline{\tau}+s\alpha\overline{\tau} = \alpha-\alpha\overline{\tau}-s\alpha+s\alpha\overline{\tau} \\
\Leftrightarrow s+\overline{\tau}(1-s) = \alpha
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\overline{\tau} = \frac{\alpha-s}{1-s} > 0$$

On voit directement[7] qu'il s'agit bien d'un maximum car la dérivée de c^* par rapport à τ est positive si et seulement si $\tau < \overline{\tau}$. Notons que nous parvenons à exhiber une valeur de τ optimale strictement positive car nous avons postulé une situation de sous accumulation ($s < \alpha$). Le meilleur choix consiste à ajuster le taux d'imposition, τ, de façon à égaliser le taux d'épargne effectif, s_τ, avec le taux d'épargne de la règle d'or ($s_{\text{or}} = \alpha$).

[7]En remplaçant "=" par ">" dans les équivalences qui précèdent.

(7) Le taux $\overline{\tau}$ permet-il d'atteindre le niveau de consommation de la règle d'or, c^*_{or}, à long terme ?

On peut montrer que le taux de taxe $\overline{\tau}$ permet d'obtenir un niveau de consommation à long terme identique à celui que nous obtiendrions en suivant la règle d'or. Pour établir ce point il suffit de substituer l'expression obtenue de $\overline{\tau}$ dans l'expression analytique de c^* obtenue plus haut. On a :

$$c^*(\overline{\tau}) = (1-s)(1-\overline{\tau})\left(\frac{s+\overline{\tau}(1-s)}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow c^*(\overline{\tau}) = (1-s)\frac{1-\alpha}{1-s}\left(\frac{s+\alpha-s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow c^*(\overline{\tau}) = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow c^*(\overline{\tau}) = c^*_{\text{or}}$$

Ainsi, en détournant (par l'intermédiaire d'une politique fiscale) une partie du revenu destiné à la consommation vers l'accumulation, l'état parvient à répliquer le taux d'épargne de la règle d'or.

Un peu plus loin... L'état peut mimer la règle d'or, en dirigeant de façon autoritaire une partie de la consommation des ménages vers l'accumulation, car l'économie est dans une situation de sur accumulation. Dans le cas contraire, *ie* dans une situation de sous accumulation, l'état ne peut atteindre cet objectif à l'aide de la politique fiscale que nous venons de décrire. En effet, la politique fiscale considérée ici revient simplement à faire en sorte que le taux d'épargne effectif,s_τ, soit supérieur au taux d'épargne s. Cela va dans le bon sens car l'économie est dans une situation de sous accumulation. Quand, au contraire, les ménages sur accumulent le capital physique, on ne peut se rapprocher de la règle d'or en faisant en sorte que le taux d'épargne effectif soit supérieur au taux d'épargne. Il faut amender la redistribution implicite (entre consommation et investissement) mise en oeuvre à l'aide de la politique fiscale. Pour cela on pourrait simplement supposer que l'état redistribue ses gains liés aux taxes sur les revenus sous la forme d'unités de consommation au ménage. Dans ce cas la loi d'évolution du stock de capital agrégé devrait s'écrire :

$$\dot{K} = s(1-\tau)Y - \delta K$$

Le taux d'épargne effectif serait alors $s_\tau = s(1-\tau)$. Et le niveau de consommation serait donné par : $c(t) = [(1-s)(1-\tau)+\tau]y(t)$. En suivant la même démarche, on peut montrer que dans une situation de sur accumulation ($s > \alpha$) il est alors possible de trouver un taux de taxe positif qui maximise le niveau de consommation à long terme. On montre que ce taux de taxe doit être tel que le taux d'épargne effectif égalise le taux d'épargne de la règle d'or : $\overline{\tau} = (s-\alpha)/s$. Enfin on montre qu'avec cette politique fiscale l'état peut mimer le taux d'épargne de la règle d'or ($c^*(\overline{\tau})$) en détournant de façon autoritaire l'épargne vers la consommation.

Pour finir, il convient de noter que l'effet de la politique fiscale dans le modèle de Solow demeure simple car le comportement d'épargne est exogène. Un changement de politique fiscale n'affecte pas le comportement d'accumulation des ménages.