Éducation, Formation, Croissance

Devoir surveillé n°1 [L2]

Université du Maine

29 avril 2009

Exercice Soit $K(t)$ le stock de capital physique d'une économie, $L(t)$ la population qui croît au taux constant $n > 0$ (on suppose que $L(0) = 1$), $\alpha \in]0,1[$, $s \in]0,1[$ le taux d'épargne et $\delta > 0$ le taux de dépréciation du capital physique. La dynamique du capital physique est décrite par :

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

et la technologie de production est de type Cobb-Douglas :

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$$

(1) Donnez une interprétation au paramètre α de la technologie de production.

Le paramètre α est l'élasticité du produit par rapport au stock de capital physique. En effet, nous avons par définition de l'élasticité :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial dK}\frac{K}{Y} &= \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}\frac{K}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}\\ &= \alpha\frac{K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}\\ &= \alpha\end{aligned}$$

Ce paramètre est positif **et** inférieur strictement à 1, cela traduit l'hypothèse de rendements décroissants du capital physique.

(2) Interprétez la loi d'évolution du stock de capital physique (la première équation).

Cette équation nous dit simplement que le stock de capital physique s'accroît si et seulement si l'investissement (le premier terme) ¡¡couvre¿¿ la dépréciation du stock de capital physique.

(3) Décrivez la dynamique du capital par tête en montrant que si $k(t) = K(t)/L(t)$ alors

$$\dot{k}(t) = sk(t)^{\alpha} - (n+\delta)k$$

Interprétez cette équation.

Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) \\
&= \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} \\
&= \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} \\
&= \frac{\dot{K}}{L} - nk
\end{aligned}$$

En substituant la loi d'évolution du stock de capital physique, il vient :

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{sY(t) - \delta K(t)}{L(t)} - nk(t) \\
&= s\frac{Y(t)}{L(t)} - (n+\delta)k(t) \\
&= sk(t)^{\alpha} - (n+\delta)k(t)
\end{aligned}$$

(4) Donnez une expression analytique pour le taux de croissance du capital par tête. Représentez graphiquement cette équation et commentez.

Le taux de croissance d'une variable à l'instant t est la variation de cette variable à l'instant t rapportée à son niveau à l'instant t. Ainsi nous avons :

$$g_k(t) \equiv \frac{\dot{k}}{k} = s\frac{k(t)^{\alpha}}{k(t))} - (n+\delta)\frac{k(t)}{k(t)} = sk(t)^{\alpha-1} - (n+\delta)$$

Le taux de croissance du stock de capital par tête est positif si est seulement si l'investissement par unité de capital physique (le premier terme) domine le taux de dépréciation du stock de capital physique par tête $(n+\delta)$. On note que l'investissement par unité de capital est une fonction monotone décroissante du stock de capital à cause de l'hypothèse de rendements décroissants du capital physique ($\alpha < 1$) et que $\lim_{k \to 0} sk(t)^{\alpha-1} = \infty$ et $\lim_{k \to \infty} sk(t)^{\alpha-1} = 0$. Pour la représentation graphique reportez vous au cours (il s'agit du graphique avec une droite horizontale – le taux de dépréciation du capital physique par tête – et une courbe monotone décroissante entre 0 et $+\infty$ – la courbe d'investissement par unité de capital. Le taux de croissance est donné par la différence entre ces deux courbes).

(5) Déterminez l'état stationnaire du modèle (pour le stock de capital par tête et le produit par tête).

À l'état stationnaire (non trivial) du modèle le taux de croissance du capital physique par tête est nul. Graphiquement, l'état stationnaire est défini par l'intersection de la courbe d'investissement par unité de capital (monotone décroissante) et la courbe (horizontale) du taux de dépréciation du stock de capital par tête. L'état stationnaire, noté $k^\star$, est tel que $g_k = 0$, c'est-à-dire tel que :

$$s\,[k^\star]^{\alpha-1} = (n+\delta)$$

à l'état stationnaire l'investissement par tête (sk^α) couvre exactement la dépréciation du stock de capital physique par tête ($(n+\delta)k^\star$). On obtient directement :

$$k^\star = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

On remarque que le niveau de long terme du stock de capital physique par tête (et donc de la production par tête) est une fonction croissante du taux d'épargne en capital physique.

(6) Quel est le taux de croissance du produit par tête à court puis à long terme ?

Le produit par tête est donné par :

$$y(t) = k(t)^\alpha$$

En appliquant la fonction logarithme népérien aux deux membres de cette équation, puis en dérivant par rapport à t, il vient :

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \alpha \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$$

Le taux de croissance du produit par tête est égal au taux de croissance du stock de capital physique par tête multiplié par l'élasticité du produit par rapport au capital. Puisque le taux de croissance du stock de capital physique par tête est nul à long terme, le taux de croissance du produit par tête est nul à long terme. À court terme le taux de croissance du produit par tête est :

$$\begin{aligned} g_y(t) &= \alpha g_k(t) \\ &= \alpha \left(sk(t)^{\alpha-1} - (n+\delta) \right) \\ &= \alpha \left(\frac{sy(t)}{k(t)} - (n+\delta) \right) \\ &= \alpha \left(sy(t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (n+\delta) \right) \end{aligned}$$

À l'instar du taux de croissance du stock de capital physique par tête, on remarque que le taux de croissance du produit par tête est une fonction décroissante du niveau du produit par tête (à cause des rendements décroissants du capital physique, $^{\alpha-1}/_{\alpha}$).

(7) En termes de comparaison des performances nationales, quelles sont les prédictions de ce modèle.

Si les économies sont structurellement homogènes (pas d'hétérogénéité sur les paramètres α, s, δ et n), ce modèle prédit que les économies (qui diffèrent seulement par les dotation initiales) vont rejoindre à long terme le même état stationnaire. Ainsi à long terme, elles convergent toutes vers le même niveau (par tête). On parle alors de convergence absolue. Si les économies du monde ne sont pas structurellement homogènes, par exemple si le taux d'épargne est spécifique à chaque nation, alors les économies vont converger vers des états stationnaires différents. On parle alors de convergence conditionnelle.

(8) Que deviennent les prédictions du modèle sur le taux de croissance si le paramètre α est égal à un (afin d'interpréter ce résultat étudiez les propriétés de la fonction de production intensive dans ce cas) ?

Si l'élasticité du produit par rapport au capital est égal à un, alors le rendement du capital physique n'est plus décroissants mais constant. Nous savons que l'hypothèse de décroissance des rendements est essentielle dans le modèle de Solow, on voit facilement ce que l'abandon de cette hypothèse change en reprenant l'équation du taux de croissance du produit par tête dans le cas $\alpha = 1$:

$$g_y(t) = s - (n+\delta) \quad \forall t$$

Le taux de croissance ne dépend pas du temps ! En abandonnant l'hypothèse de rendements décroissants du capital physique nous perdons la transition. Le taux de croissance du produit ne dépend plus (de façon décroissante) du niveau du produit et ne dépend que de la différence entre le taux d'épargne (de l'ordre de 20%) et le taux de dépréciation du capital physique par tête (de l'ordre de 4%). Ainsi le modèle prédit de la croissance à long terme des variables par têtes. On parle alors de modèle de croissance endogène (il n'est pas nécessaire d'augmenter le modèle avec un progrès technique exogène pour obtenir de la croissance à long terme des variables par tête). En perdant la dynamique de transition nous perdons la prédiction de convergence (absolue ou conditionnelle). Si des économies structurellement homogènes sont hétérogènes en termes de dotations initiales, l'écart entre ces économies ne sera jamais résorbé (puisque les riches et les pauvres bénéficient du même taux de croissance constant, les niveaux ne se rapprochent pas). Le cas $\alpha = 1$ permet d'illustrer l'importance de l'hypothèse de rendements décroissants dans le modèle de Solow.