Analyse des Séries Temporelles Non Stationnaires

IUP IES3, Université d'Evry

7 septembre 2004

Exercice 1 On considère deux marches aléatoires non corrélées,

$$\begin{cases} y_t &= y_{t-1} + u_t \\ x_t &= x_{t-1} + v_t \end{cases} \tag{1}$$

où u_t et v_t sont des bruits blancs d'espérances nulles, de variances respectives σ_u^2 et σ_v^2 et vérifiant $\mathbb{E}[u_t v_s] = 0$ pour tout $(s,t) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que les conditions initiales des deux marches aléatoires sont nulles. On estime le modèle suivant par les moindres carrés ordinaires,

$$y_t = a + by_t + \varepsilon_t \tag{2}$$

(1) Quel est le comportement asymptotique de $\widehat{b}_T$ lorsque T (la dimension de l'échantillon) tend vers l'infini.
(2) Quel est le comportement asymptotique de $\widehat{a}_T$?
(3) Quel est le comportement asymptotique du R^2 associé à cette régression ? Commentez.

Exercice 2 Un économiste observe une série temporelle $\{y_t\}_{t=1}^T$ (avec $T = 50000$) et il sait que le processus générateur des données est de la forme suivante :

$$\begin{cases} y_t = ay_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t = b\varepsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{cases}$$

avec $\{\epsilon_t\}_{t=1}^T$ un bruit blanc d'espérance nulle et de variance $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $|b| < 1$ et $|a| \leq 1$. Il estime, par les moindres carrés ordinaires, le modèle $y_t = ay_{t-1} + u_t$ et obtient $\widehat{a}_T = 0,99996408061771$ et la fonction d'autocovariance suivante pour la perturbation estimée :

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\widehat{\gamma}_u(h)$	1,357	0,684	0,342	0,170	0,083	0,043	0,020	0,006	-0,003	-0,004
$\widehat{\rho}_u(h)$	1,000	0,504	0,252	0,125	0,061	0,032	0,015	0,004	-0,002	-0,003

Proposez une statistique de test de racine unitaire (en n'oubliant pas le processus générateur des données qui est connu à quelques paramètres près). Établissez son comportement asymptotique puis mettez en oeuvre le test.

Exercice 3 [Endogénéité et racine unitaire] (1) On considère le processus générateur des données suivant :

$$\begin{cases} y_t = \beta x_t + u_t \\ x_t = x_{t-1} + v_t \end{cases} \tag{3}$$

pour $t = 1, ..., T$ et $x_0 = 0$. On suppose que $u_t \sim BB(0, \sigma_u^2)$, $v_t \sim BB(0, \sigma_v^2)$, $\mathbb{E}[u_t v_s] = 0$ et $\mathbb{E}[u_t x_s] = 0$ pour tout couple (t, s) dans $\{1, ..., T\}^2$, $\mathbb{E}[x_t v_s] = 0$ pour tout $s > t$. Ce modèle est non stationnaire. Que pouvez vous dire de plus sur ce modèle ? Comment pouvez-vous interpréter le vecteur $(1, -\beta)$?
(2) On veut estimer ce modèle, mais on observe la marche aléatoire $\{x_t\}_{t=1}^T$ avec erreur :

$$\mathcal{X}_t = x_t + w_t$$

avec $w_t \sim BB(0, \sigma_w^2)$, $\mathbb{E}[x_t w_s] = 0$ pour tout couple (t, s) dans $\{1, ..., T\}^2$ et $\mathbb{E}[u_t w_s] = 0$ pour tout couple (t, s) dans $\{1, ..., T\}^2$. Montrez qu'il est possible d'écrire la première équation sous la forme :

$$y_t = \beta \mathcal{X}_t + \varepsilon_t \tag{4}$$

Vous exprimerez la perturbation ε_t en fonction de de u_t, w_t et β.
(3) Montrez que la perturbation ε_t est corrélée avec $\mathcal{X}_t$, c'est-à-dire que $\mathbb{E}[\mathcal{X}_t \varepsilon_t] \neq 0$. Quelle devrait être la conséquence de cette corrélation dans un cadre standard (stationnaire) ?
(4) Montrez que l'estimateur des moindres carrés ordinaires du paramètre β dans l'équation 4 peut s'écrire de la façon suivante :

$$T(\widehat{\beta}_T - \beta) = \frac{T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathcal{X}_t \varepsilon_t}{T^{-2} \sum_{t=1}^T \mathcal{X}_t^2}$$

(5) Montrez le résultat asymptotique suivant :

$$T(\widehat{\beta}_T - \beta) \underset{T\to\infty}{\Longrightarrow} \frac{\sigma_u \sigma_v \int_0^1 V(r) dU(r) - \beta \sigma_v \sigma_w \int_0^1 V(r) dW(r)}{\sigma_v^2 \int_0^1 V(r)^2 dr} \tag{5}$$

Interprétez ce résultat. L'estimateur de β est-il convergent ? Pourquoi ?
(6) Montrez que la statistique de student $t_\beta = (\widehat{\beta}_T - \beta)/\mathbb{V}[\widehat{\beta}_T]^{\frac{1}{2}}$ est asymptotiquement normalement distribuée (d'espérance nulle et de variance unitaire) si l'erreur de mesure est nulle (*ie*, $\sigma_w = 0$). Interprétez ce résultat. Dans quel cas ce résultat demeure t-il valide en présence d'erreur de mesure ?

Exercice 4 [Pantula & Hall, 1991] Soit $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus défini par le DGP suivant :

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + u_t \\ u_t &= v_t + \theta v_{t-1} \end{aligned}$$

avec v_t un bruit blanc d'espérance nulle et de variance $\sigma_v^2 > 0$. On observe une réalisation $\{y_t, t = 1, ..., T\}$ de ce processus et on veut tester la présence d'une racine unitaire contre la stationnarité. La perturbation de la marche aléatoire est un processus MA(1). Ainsi, l'estimation du modèle

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

aboutirait à une distribution limite de la statistique de test $T(\hat{\rho} - 1)$ ne correspondant pas à la distribution tabulée par Dickey-Fuller. Cette différence vient de la non prise en compte de la structure d'autocorrélation dans la perturbation $\{u_t\}$. On envisage ici une stratégie originale (relativement au cours) pour traiter ce problème en utilisant un estimateur à variable instrumentale pour estimer ρ,

$$\hat{\rho}_{IV,k} = \left(\sum_{t=k+1}^{T} y_{t-k} y_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=k+1}^{T} y_{t-k} y_t$$

(1) Rappelez les propriétés que doit vérifier un instrument et pourquoi (en toute généralité) il peut être intéressant d'utiliser ce genre d'estimateur. L'estimateur $\hat{\rho}_{IV,k}$ permet-il ici de corriger d'un biais ?
(2) Déterminez le retard minimal de k, noté k^*, tel que $\{y_{t-k}\}$ soit un instrument valide. Justifiez votre réponse.
(3) Déterminez la distribution asymptotique de la statistique $T(\hat{\rho}_{IV,k^*} - 1)$ lorsque la dimension chronologique, T, tend vers l'infini. Cette statistique, basée sur un estimateur à variable instrumentale, est-elle satisfaisante ? Pourquoi ?

Solution de l'exercice 1. (1) On commence par écrire la définition de l'estimateur du paramètre b :

$$\widehat{b}_T = \frac{\sum_{t=1}^T y_t(x_t - \overline{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \overline{x})^2}$$

Notez que cette écriture de l'estimateur revient à régresser $\{y_t\}_{t=0}^T$ sur la série temporelle $\{x_t\}_{t=0}^T$ centrée, en omettant la constante. Le théorème de Frisch – Waugh nous assure qu'on obtient la même estimation du paramètre b que dans le cas où on régresse $\{y_t\}_{t=0}^T$ sur $\{x_t\}_{t=0}^T$ et une constante. De façon équivalente on a :

$$\widehat{b}_T = \frac{T^{-2}\sum_{t=1}^T y_t(x_t - \overline{x})}{T^{-2}\sum_{t=1}^T (x_t - \overline{x})^2}$$

en développant, on obtient :

$$\widehat{b}_T = \frac{T^{-2}\sum_{t=1}^T y_t x_t - \left(T^{-\frac{1}{2}\overline{y}}\right)\left(T^{-\frac{1}{2}\overline{x}}\right)}{T^{-2}\sum_{t=1}^T x_t^2 - T^{-1}\overline{x}^2}$$

En utilisant les résultats asymptotiques connus, il vient directement :

$$\widehat{b}_T \underset{T\to\infty}{\Longrightarrow} \frac{\sigma_u}{\sigma_v}\frac{\int_0^1 U(r)V(r)dr - \int_0^1 U(r)dr\int_0^1 V(r)dr}{\int_0^1 V(r)^2dr - \left(\int_0^1 V(r)dr\right)^2}$$

où $U(r)$ et $V(r)$ sont des processus de Wiener tels que :

$$T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[rT]} u_t \underset{T\to\infty}{\Longrightarrow} \sigma_u U(r)$$

et

$$T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{[rT]} v_t \underset{T\to\infty}{\Longrightarrow} \sigma_v V(r)$$

avec $r \in [0,1]$ et $[x]$ la partie entière de x. On a montré que l'estimateur du paramètre b tend vers une distribution non dégénérée lorsque la dimension de l'échantillon tend vers l'infini. Ce résultat peut étonner puisque les deux marches aléatoires sont par construction non corrélées. On s'attendrait plutôt à ce que $\widehat{b}_T$ tende vers zéro lorsque T tend vers l'infini.
(2) L'estimateur de la constante est $\widehat{a}_T = \overline{y} - \widehat{b}_T\overline{x}$. On sait que les moyennes empiriques $\overline{y}$ et $\overline{x}$ sont des $O_p(T^{1/2})$. On a montré que $\widehat{b}_T \sim O_p(1)$. Ainsi on sait que $\widehat{a}_T$ est un $O_p(T^{1/2})$, c'est à dire que l'estimateur de la constante

diverge lorsque la dimension de l'échantillon tend vers l'infini.
(3) Pas le courage... Voir le cours.

Solution de l'exercice 2. Il faut mettre en oeuvre un test à la Phillips–Perron. Mais ici il est inutile d'utiliser un estimateur non-paramétrique de la variance de long terme, car le processus générateur des données nous dit que la perturbation est un processus autorégressif d'ordre un.

Solution de l'exercice 3. Il suffit de suivre l'énoncé...

Solution de l'exercice 4. **(1)** Un bon instrument doit être (il faut se rappeler de votre premier cours d'économétrie) non corrélé avec la perturbation et corrélé avec la variable explicative. Un estimateur à variable instrumentale permet de corriger le biais d'un estimateur des MCO lorsque une variable explicative ne vérifie pas la propriété d'orthogonalité avec la perturbation du modèle. On est bien confronté à ce problème ici. Etant donnée la structure MA(1) de $\{u_t\}$ on a $\mathbb{E}\left[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\right] \neq 0$ et, puisque y_{t-1} dépend de ε_{t-1}, $\mathbb{E}\left[\varepsilon_t y_{t-1}\right] \neq 0$.
(2) Par la structure MA(1) de $\{u_t\}$ on voit que y_{t-k} avec $k \geq 2 = k^*$ est un instrument valide. Cet instrument est corrélé avec y_{t-1} grâce à la structure AR(1) du processus de $\{y_t\}$.
(3) On choisit un instrument y_{t-k} tel que $k \geq k^*$. L'estimateur à variable instrumentale du paramètre ρ dans le modèle $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ est défini par :

$$\hat{\rho}_{IV,k,T} = \frac{\sum_{t=k+1}^{T} y_{t-k}y_t}{\sum_{t=k+1}^{T} y_{t-k}y_{t-1}}$$

D'après le processus générateur des données, on a :

$$\hat{\rho}_{IV,k,T} - 1 = \frac{\sum_{t=k+1}^{T} y_{t-k}u_t}{\sum_{t=k+1}^{T} y_{t-k}y_{t-1}}$$

avec $\{u_t\}$ un processus MA(1). On s'intéresse successivement aux moments définis au numérateur puis au dénominateur. Afin de simplifier la présentation on posera $k = 2$. Pour définir le comportement asymptotique du numérateur, on note en premier que :

$$T^{-1}\sum_{t=3}^{T} y_{t-2}u_t = 0,5T^{-1}\sum_{t=3}^{T}\left[y_t^2 - y_{t-2}^2 - u_t^2 - u_{t-1}^2 - 2u_tu_{t-1} - 2y_{t-2}u_{t-1}\right]$$

et

$$2y_{t-2}u_{t-1} = y_{t-1}^2 - y_{t-2}^2 - u_{t-1}^2$$

et donc que

$$\begin{aligned}
T^{-1}\sum_{t=3}^{T} y_{t-2}u_t &= 0,5T^{-1}\sum_{t=3}^{T}\left[y_t^2 - y_{t-1}^2 - u_t^2 - 2u_tu_{t-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(T^{-\frac{1}{2}}y_T\right)^2 - T^{-1}\sum_{t=1}^{T}u_t^2 - 2T^{-1}\sum_{t=1}^{T}u_tu_{t-1}\right] + o_p(1)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$T^{-1}\sum_{t=3}^{T} y_{t-2}u_t \underset{T\to\infty}{\Longrightarrow} \frac{\sigma_{lt}^2}{2}\left[W(1)^2 - 1\right]$$

où

$$\sigma_{lt}^2 = \lim_{T\to\infty}\mathbb{V}\left[T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}u_t\right]$$

est la variance de long terme associée au processus MA(1) $\{u_t\}$. Pour le dénominateur, on a

$$\begin{aligned}
T^{-2}\sum_{t=3}^{T} y_{t-2}y_{t-1} &= T^{-2}\sum_{t=3}^{T} y_{t-2}^2 + T^{-2}\sum_{t=3}^{T} y_{t-2}u_{t-1} \\
&= T^{-2}\sum_{t=3}^{T} y_{t-2}^2 + o_p(1)
\end{aligned}$$

et donc

$$T^{-2}\sum_{t=3}^{T} y_{t-2}y_{t-1} \underset{T\to\infty}{\Longrightarrow} \sigma_{lt}^2\int_0^1 W(r)^2dr$$

Au total, on a :

$$T\left(\hat{\rho}_{IV,2,T} - 1\right) \underset{T\to\infty}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}\frac{W(1)^2 - 1}{\int_0^1 W(r)^2dr}$$

La distribution asymptotique est libre de paramètres de nuisance. En employant un estimateur à variable instrumentale plutôt qu'un estimateur des MCO pour estimer le paramètre ρ, on obtient une distribution limite qui ne dépend pas de la variance de long terme et de la variance du processus $\{u_t\}$. On retrouve ainsi directement les distributions tabulées pour le test de Dickey et Fuller.