Système d'équations différentielles linéaires

Stéphane Adjemian

Université du Maine, GAINS & CEPREMAP

stephane.adjemian@ens.fr

10 octobre 2010

Définition 1. *Les fonctions* $x_i(t)$ *(pour* $i = 1, \ldots, n$*) définies sur l'intervalle* $\mathbb{R}_+$*, sont solutions sur* $\mathbb{R}_+$ *du système d'équations différentielles d'ordre un :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \cdots + a_{1,n}x_n(t) + b_1(t) \\ \dot{x}_2(t) & = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \cdots + a_{2,n}x_n(t) + b_2(t) \\ & \vdots \\ \dot{x}_n(t) & = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \cdots + a_{n,n}x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \tag{1}$$

où $a_{i,j}$ *(pour* $i = 1, \ldots, n$ *et* $j = 1, \ldots, n$ *sont des paramètres réels) et* $b_i(t)$ *(pour* $i = 1, \ldots, n$*) sont des fonctions continues de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$*, si les fonctions* $x_i(t)$ *(*$i = 1, \ldots, n$*) sont dérivables sur* $\mathbb{R}_+$ *et vérifient avec leurs dérivées* $\dot{x}_i(t)$ *le système d'équations linéaires (1).*

Le système (1) peut s'écrire sous forme matricielle. On note $X(t) \equiv (x_1(t), \dots, x_2(t))'$ un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $b(t) \equiv (b_1(t), \dots, b_n(t))'$, Le système d'équations différentielles (1) s'écrit alors de façon équivalente sous la forme :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + b(t) \tag{2}$$

où la matrice (réelle) carrée A de dimension $n \times n$ est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 1. *Dans ce chapitre on s'intéresse aux solutions réelles ($\{x_i(t); i = 1, \ldots, n\}$ ou $X(t)$) de (1) ou (2). Néanmoins, dans notre recherche des solutions nous serons conduit à transformer le système d'équations différentielles et nous serons parfois amené à calculer les solutions complexes du système transformé équivalent. On verra que cela ne pose pas de problème particulier.*

Remarque 2. *Si A et $b(t)$ dans (2) sont une matrice et un vecteur réels, alors $X(t) = X_1(t) + \mathrm{i}X_2(t)$ est une solution complexe de (2) si et seulement si on a :*

$$\dot{X}_1(t) + \mathrm{i}\dot{X}_2(t) = AX_1(t) + \mathrm{i}AX_2(t) + b(t)$$

soit, de façon équivalente, en regroupant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) & = AX_1(t) + b(t) \\ \dot{X}_2(t) & = AX_2(t) \end{cases}$$

– Résoudre directement le système n'est généralement pas trivial car la variation d'une variable ($\dot{x}_i(t)$) dépend des niveaux de toutes les variables ($X(t)$).
– L'idée est de transformer ce système linéaire en considérant des nouvelles variables ($Y(t)$) qui sont des combinaisons linéaires (indépendantes) des variables originales ($X(t)$). On choisit les combinaisons linéaires qui nous arrangent. Si on a de la chance, on peut trouver n combinaisons linéaires orthogonales (linéairement indépendantes) telles que la variation d'une variable transformée ($\dot{y}_i(t)$) ne dépend que du niveau de cette variable ($y_i(t)$) et d'une combinaison linéaire des éléments de $b(t)$.
– Plus formellement, nous cherchons une nouvelle base... Où, par exemple, la matrice A est diagonale.

- Si H est une matrice de passage (ou de changement de base) dans $\mathbb{C}^n$, alors $Y(t) = H^{-1}X(t)$ est composé de n fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$, et on a $\dot{Y}(t) = H^{-1}\dot{X}(t)$.
- Nous pouvons alors écrire (2) de façon équivalente sous la forme :

$$\dot{X}(t) = H\widehat{A}H^{-1}X(t) + b(t)$$

soit en pré-multipliant par l'inverse de la matrice de changement de base :

$$H^{-1}\dot{X}(t) = H^{-1}H\widehat{A}H^{-1}X(t) + H^{-1}b(t)$$

soit par définition :

$$\dot{Y}(t) = \widehat{A}X(t) + c(t) \tag{3}$$

- On suppose que nous sommes capables d'identifier une matrice de changement de base H telle que nous pouvons facilement obtenir une solution du système transformé (3).

- Soit A une matrice $n \times n$ réelle.
- Le polynôme caractéristique associée à la matrice A est :

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$

- Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique χ_A, c'est-à-dire les valeurs de λ telles que $|A - \lambda I_n| = 0$. Le polynôme caractéristique possède au plus n racines distinctes. On notera λ_k la racine d'ordre (de multiplicité) r_k du polynôme $\chi_A(\lambda)$.
- Pour chaque valeur propre λ_k, on cherche r_k vecteurs v non nuls linéairement indépendants tels que

$$(A - \lambda_k I_n)v = 0$$

On dit que v est un vecteur propre.

– Si pour chaque valeur propre λ_k on trouve r_k vecteurs propres $v_{k,1}, \ldots, v_{k,r_k}$ linéairement indépendants, alors la matrice A est diagonalisable. Les n vecteurs propres forment la matrice de passage $H \equiv (v_1, \ldots, v_n)$ telle que :

$$A = H\widehat{A}H^{-1}$$

où

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_{1,1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \widehat{a}_{2,2} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \widehat{a}_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $\widehat{a}_{i,i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ est une valeur propre de A.

- Puisque l'équation $(A - \lambda_k I_n)v = 0$ possède au moins une solution non nulle v pour toute valeur propre λ_k, une matrice A possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
- S'il n'est pas possible de trouver $r_k k$ vecteurs propres linéairement indépendants pour chaque valeur propre λ_k de multiplicité r_k, alors la matrice A n'est pas diagonalisable.

Soit la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Notons que cette matrice est symétrique. Le polynôme caractéristique associé est :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= |A - \lambda I_n| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 - 1 \\ &(3-\lambda)(1-\lambda) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont donc réelles et distinctes : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$. On cherche maintenant les vecteurs propres associées à λ_1 et λ_2.

Vecteur propre associé à λ_1 : le vecteur propre v_1 doit vérifier :

$$(A - \lambda_1 I_2)v_1 = 0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{1,1} + v_{2,1} & = 0 \\ v_{1,1} + v_{2,1} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_{2,1} = -v_{1,1}$$

On posera $v_1 = (1, -1)'$ le premier vecteur propre.

Vecteur propre associé à λ_2 : le vecteur propre v_2 doit vérifier :

$$(A - \lambda_2 I_2)v_1 = 0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -v_{1,2} + v_{2,2} & = 0 \\ v_{1,2} + -v_{2,2} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_{2,2} = v_{1,2}$$

On posera $v_2 = (1,1)'$ le second vecteur propre.

La matrice de changement de base est $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

On peut calculer l'inverse de la matrice de passage :

$$H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et vérifier que :

$$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Que faire lorsque la matrice (dite de transition) A est non diagonalisable ?...

- Soit A une matrice carrée $n \times n$ (réelle ou complexe).
- Soient λ_k $k = 1, \dots, m < n$ les valeurs propres distinctes de multiplicité $r_k \geq 1$ de la matrice A.
- On suppose que la matrice A n'est pas diagonalisable, autrement dit il n'est pas possible de trouver r_k vecteurs v linéairement indépendants satisfaisant $(A - \lambda_k I_n)v = 0$ (pour tout $k = 1, \dots, m$).
- On peut quand même exhiber une matrice de passage H telle que $\widehat{A} = H^{-1}AH$ est une matrice *bloc diagonale*. Le nombre de blocs correspond au nombre de valeurs propres distinctes. Chaque bloc associé à une valeur propre λ_k est une matrice triangulaire supérieure de dimension r_k.
- Ce changement de base nous intéresse car il permettra de résoudre un système d'équations différentielles linéaires de façon récursive.

- Soit A une matrice carrée $n \times n$ (réelle ou complexe).
- Soient λ_k $k = 1, \dots, m < n$ les valeurs propres distinctes de multiplicité $r_k \geq 1$ de la matrice A.
- On suppose que la matrice A n'est pas diagonalisable, autrement dit il n'est pas possible de trouver r_k vecteurs v linéairement indépendants satisfaisant $(A - \lambda_k I_n)v = 0$ (pour tout $k = 1, \dots, m$).
- On peut quand même exhiber une matrice de passage H telle que $\widehat{A} = H^{-1}AH$ est une matrice *bloc diagonale*. Le nombre de blocs correspond au nombre de valeurs propres distinctes. Chaque bloc associé à une valeur propre λ_k est une matrice triangulaire supérieure de dimension r_k.
- Ce changement de base nous intéresse car il permettra de résoudre un système d'équations différentielles linéaires de façon récursive.

On obtient les vecteurs de la matrice de passage de la façon suivante.

Pour chaque valeur propre distincte λ_k, on procède récursivement. On commence en choisissant une base du sous espace propre engendré par la valeur propres λ_k, c'est-à-dire en choisissant q_k vecteurs $v_{k,1},\ldots,v_{k,q_k}$ non nuls et linéairement indépendants tels que

$$(A-\lambda_k I_n)v_{k,i}=0 \text{ pour } i=1,\ldots,q_k$$

On cherche alors un vecteur $\alpha\equiv(\alpha_1,\ldots,\alpha_{q_k})'$ tel qu'il existe un vecteur w solution non nulle de :

$$(A-\lambda_k I_n)w=\left(v_{k,1},\ldots,v_{k,q_k}\right)\alpha$$

Si $q_k+1=r_k$, on s'arrête là et les colonnes de la matrice de passage associée à λ_k sont $(v_{k,1},\ldots,v_{k,q_k},w)$. Sinon on reprend l'étape précédante avec $(v_{k,1},\ldots,v_{k,q_k},w)$ pour sous espace propre engendré par λ_k.

Soit la matrice carrée réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$$

et il admet une racine triple $\lambda = 1$. Les vecteurs propres sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

qui est de rang un. Il n'existe que deux vecteurs propres linéairement indépendants (la matrice A n'est pas diagonalisable) :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

v_1 et v_2 forment une base du sous espace propre engendré par $\lambda = 1$.
Le système $(A - I_3)w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} 2w_1 + 3w_2 + w_3 & = \alpha_2 \\ -2w_1 - 3w_2 - w_3 & = \alpha_1 \\ 2w_1 + 3w_2 + w_3 & = -3\alpha_1 - 2\alpha_2 \end{cases}$$

et il n'admet de solution que si $\alpha_1 = -\alpha_2$ (sinon les deux premières équations ne sont pas compatibles). En posant $\alpha_1 = 1$, on peut choisir :

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de transition est :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

on a :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\widehat{A} = H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit le système transformé :

$$\dot{Y}(t) = \widehat{A}X(t) + c(t) \tag{3}$$

où $\widehat{A} = H^{-1}AH$, avec H une matrice de changement de base. On distingue deux cas :

1. Si $\widehat{A}$ est une matrice diagonale, nous n'avons plus qu'à résoudre n équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec un second membre variable.
2. Si $\widehat{A}$ est une matrice bloc diagonal (base réduite), nous pouvons traiter les blocs séparément. Chaque bloc étant triangulaire supérieur , il suffit de résoudre par le bas. Par exemple, si on se concentre sur le bloc associé à la valeur propre λ_k de multiplicité r_k, nous avons un système de r_k équations différentielles, que nous pouvons résoudre indépendamment des $n - r_k$ autres

équations (et variables) :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_{i+1}(t) \\ \dot{y}_{i+2}(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_{i+r_k}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k & \widehat{a}_{k,1,2} & \dots & \widehat{a}_{k,1,r_k} \\ 0 & \lambda_k & \dots & \widehat{a}_{k,1,r_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i+1}(t) \\ y_{i+2}(t) \\ \vdots \\ y_{i+r_k}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{i+1}(t) \\ c_{i+2}(t) \\ \vdots \\ c_{i+r_k}(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

où les paramètres λ_k, $\widehat{a}_{k,i,j}$ sont dans $\mathbb{C}$ et les fonctions $c_j(t)$ sont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

La dernière équation de ce sous système,
$\dot{y}_{i+r_k}(t) = \lambda_k y_{i+r_k}(t) + c_{j+r_k}(t)$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 complexe que nous savons résoudre. Nous savons qu'il existe une unique fonction $y_{i+r_k}(t)$ à valeurs complexes satisfaisant cette équation fonctionnelle et une condition initiale $y_{i+r_q}(0)$. Une fois la solution obtenue, nous pouvons la substituer dans l'équation du dessus, qui devient une équation différentielle linéaire d'ordre un que nous savons

résoudre... En remontant le triangle, on obtient ainsi une solution unique pour ce système (étant données des conditions initiales pour les r_k variables).

Dans tout les cas, on voit que le système transformé (3), où $\widehat{A}$ est une forme réduite ou diagonale de A, admet pour tout vecteur initial $Y_0 \in \mathbb{C}^n$ donné une solution $Y(t)$ et une seule de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}^n$ telle que $Y(0) = Y_0$.

Théorème 1 (Existence et unicité). *Si les seconds membres, $b_i(t)$, sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, pour tout vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^n$, le système différentiel (2), $\dot{X}(t) = AX(t) + b(t)$, admet une solution réelle et une seule sur $\mathbb{R}_+$ telle que $X(0) = X_0$. C'est aussi l'unique solution complexe qui vérifie la condition initiale, et elle est égale à $HY(t)$, où $Y(t)$ est la solution du système transformé (3) telle que $Y(0) = H^{-1}X_0$*

Exemple 1. *On veut résoudre le système d'équations différentielles suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = x_1(t) - x_2(t) + 2 \\ \dot{x}_2(t) & = x_1(t) + x_2(t) - 2t \end{cases}$$

On commence par réécrire ce système sous une forme matricielle...

Preuve 1 (du théorème 1)**.** *On a vu que le système transformé (3) admet une solution complexe et une seule* $Y(t)$ *telle que :* $Y(0) = H^{-1}X_0$*. Puisque les systèmes (2) et (3) sont équivalents,* $X(t) = HY(t)$ *est l'unique solution complexe de (2) telle que* $X(0) = X_0$*. Cette solution s'écrit* $X(t) = X_1(t) + \mathrm{i}X_2(t)$ *et on a :*

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) & = AX_1(t) + b(t) \\ \dot{X}_2(t) & = AX_2(t) \end{cases}$$

En particulier en $t = 0$ *nous avons* $X_1(0) + \mathrm{i}X_2(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n$*, il s'ensuit que la partie imaginaire initiale est nulle. Puisque* $\dot{X}_2(t) = AX_2(t)$*, la partie imaginaire est nulle à tout instant. L'unique solution complexe est donc réelle à tout instant.* □

Exemple 1 (suite)**.** *L'écriture matricielle équivalente est* $\dot{X}(t) = AX(t) + b(t)$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2t \end{pmatrix}$$

La matrice de transition est diagonalisable dans $\mathbb{C}$*. Le polynôme caractéristique est :*

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1$$

Les racines de ce polynôme sont $\lambda_1 = 1 - \mathrm{i}$ *et* $\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}$*. Calculons les vecteurs propres. Le premier vecteur propre (associé à* λ_1*)* v_1 *est tel que :*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est à dire tel que :

$$\begin{cases} \mathrm{i}v_{1,1} - v_{2,1} & = 0 \\ v_{1,1} + \mathrm{i}v_{2,1} & = 0 \end{cases}$$

En observant que la seconde équation est égale à i *fois la première, on voit qu'il existe une unique solution qui doit satisfaire* $v_{1,1} = -\mathrm{i}v_{2,1}$*. On posera :*

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le second vecteur propre doit satisfaire :

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} -\mathrm{i}v_{1,2} - v_{2,2} & = 0 \\ v_{1,2} - \mathrm{i}v_{2,2} & = 0 \end{cases}$$

À nouveau, en multipliant par $-\mathrm{i}$*, on vérifie que ces deux équations sont colinéaires et que le vecteur propre doit être tel que* $v_{1,2} = \mathrm{i}v_{2,2}$*. On posera :*

$$v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Au final, la matrice de changement de base est :

$$H = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et son inverse :

$$H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

En pré-multipliant le système dynamique par H^{-1}*, en posant* $Y(t) = H^{-1}X(t)$ *et* $c(t) = H^{-1}b(t)$ *il vient :*

$$\dot{Y}(t) = \widehat{A}Y(t) + c(t)$$

où

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ et } c(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}-t \\ -\mathrm{i}-t \end{pmatrix}$$

soit de façon équivalente :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) & = (1-\mathrm{i})y_1(t) + \mathrm{i} - t \\ \dot{y}_2(t) & = (1+\mathrm{i})y_2(t) - \mathrm{i} - t \end{cases}$$

Ces deux équations différentielles linéaires d'ordre un complexes sont indépendantes. Pour obtenir des solutions particulières des équations complètes sont, on postule des solutions polynomiales de la forme $a + bt$ *où* a *et* b *sont des paramètres dans* $\mathbb{C}$ *identifiés en substituant la forme postulée dans chacune des ED complètes. Ensuite il ne nous reste plus qu'à* *augmenter les solutions particulières avec les solutions générales des équations sans second membre. À l'arrivée on obtient :*

$$\begin{cases} y_1(t) & = \beta e^{(1-\mathrm{i})t} + \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right) t + \frac{1}{2} \\ y_2(t) & = \alpha e^{(1+\mathrm{i})t} + \left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right) t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

et on a, avec $Y(0) = H^{-1}X(0)$ *:*

$$\beta + \frac{1}{2} = y_1(0) = \frac{\mathrm{i}}{2} x_{0,1} + \frac{1}{2} x_{0,2}$$
$$\alpha + \frac{1}{2} = y_2(0) = -\frac{\mathrm{i}}{2} x_{0,1} + \frac{1}{2} x_{0,2}$$

qui définissent les valeurs de α *et* β*. Revenons au problème initial, la solution pour* $X(t)$ *est donnée par* $X(t) = HY(t)$*, soit :*

$$x_1(t) = -\mathrm{i} y_1(t) + i y_2(t)$$
$$x_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

En remplaçant $e^{(1+\mathrm{i})t} = e^t\left(\cos t + \mathrm{i}\sin t\right)$ *et* $e^{(1-\mathrm{i})t} = e^t\left(\cos t - \mathrm{i}\sin t\right)$*, on obtient :*

$$\begin{cases} x_1(t) & = x_{0,1} e^t \cos t + (x_{0,2} - 1) e^t \sin t + t \\ x_2(t) & = x_{0,1} e^t \sin t + (x_{0,2} - 1) e^t \cos t + t + 1 \end{cases}$$

Exemple 2. *On veut résoudre le système d'équations différentielles suivant :*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= x(t) + 1 \\ \dot{x}(t) &= 3x(t) - 2y(t) + 1 \end{cases}$$

On commence par réécrire ce système sous une forme matricielle...

Exemple 2 (suite)**.** *Bouh !*

Propriété 1. *Si $\Psi(t)$ est une solution particulière du système (2), alors $X(t)$ est solution de (2) si et seulement si $X(t) - \Psi(t)$ est solution du système sans second membre : $\dot{Z}(t) = AZ(t)$.*

Propriété 2. *L'ensemble des solutions réelles (complexes) d'un système linéaire sans second membre*

$$\dot{X}(t) = AX(t) \tag{5}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) de dimension n.

Preuve 2 (de la propriété 1)**.** *Puisque* $\Psi(t)$ *est une solution de de l'équation complète, nous avons* $b(t) = \dot{\Psi}(t) - A\Psi(t)$*, par définition nous avons aussi* $b(t) = \dot{X}(t) - AX(t)$*. Il vient donc* $\dot{X}(t) - \dot{\Psi}(t) = A(X(t) - \Psi(t))$*.* □

Preuve 3 (de la propriété 2)**.** *Soit une condition initiale* $X_0 = (x_{1,0}, \ldots, X_{n,0})' \in \mathbb{R}^n$ *(ou dans* $\mathbb{C}^n$*) ; soit* $X_i(t)$ *l'unique solution de (5) telle que* $X_i(0) = U_i$*, où* U_i *est le i-ème vecteur de la base canonique (*$i = 1, \ldots, n$*), c'est-à-dire le vecteur* $U_i = (u_{i,j})$ *tel que* $u_{i,j} = 1$ *si* $j = i$ *et zéro sinon. Les* n *fonctions* $X_i(t)$ *sont linéairement indépendantes, car leurs valueurs en* $t = 0$ *sont des vecteurs linéairement indépendants. Par linéarité* $X(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{i,0} X_i(t)$ *est une solution de (5) vérifiant* $X(0) = X_0$*. Ainsi, l'unique solution de (5) telle que* $X(0) = X_0$ *est :*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{i,0} X_i(t) \tag{6}$$

où (6) définit l'ensemble des solutions de (5) en fonction des conditions initiales. Il s'agit donc d'un espace vectoriel de dimension n *(voir le chapitre trois section cinq de Philippe Michel (1989)).*

Théorème 2. *Si* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *est une base de forme réduite pour la matrice de transition* A *(les vecteurs colonnes* v_i *forment une matrice de changement de base* H*), la solution générale de (5) est :*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t) v_i \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{7}$$

où $y_1(t), \ldots, y_2(t)$ *sont les coordonnées de la solution* $Y(t)$ *du système transformé* $\dot{Y}(t) = \widehat{A}Y(t)$ *telle que* $Y(0) = H^{-1}X(0)$*. Chaque* $y_i(t)$ *est de la forme* $e^{\lambda_i t P_i(t)}$*, où* P_i *est un polynôme de degré plus petit que l'ordre de multiplicité* r_i *de la valeut propre* λ_i*.*

Preuve 4 (du théorème 2). *Par définition nous avons $X(t) = HY(t)$, ce qui donne l'équation (7) car les vecteurs colonnes v_i sont les colonnes de la matrice H. Dans la résolution d'un sous système d'équations différentielles transformé (4) sans second membre, on obtient (pour la dernière équation) $y_{i+r_k}(t) = e^{\lambda_k t} P_{i+r_k}(t)$ avec $P_{i+r_k}(t)$ constant égal à $y_{i+r_k}(0)$. Toujours dans le même bloc, si on remonte à la ligne précédante en substituant la solution pour $y_{i+r_k}(t)$ on obtient une équation différentielle linéaire d'ordre un avec un second membre variable (produit d'une exponentielle dont le taux de croissance est λ_k et d'une constante). On sait par la proposition 3 du chapitre 1 que la solution pour $y_{i+r_k-}(t)$ dans cette équation est de la forme :*

$$y_{i+r_k-1}(t) = e^{\lambda_k t}\left(y_{i+r_k-1}(0) + \int_0^t P_{i+r_k}(s)\mathrm{d}s\right) = e^{\lambda_k t} P_{i+r_k-1}(t)$$

où $P_{i+r_k-1}(t)$ est un polynôme d'ordre un en t... Par récurrence arrière, la solution pour $y_{i+1}(t)$ est de la forme $e^{\lambda_k t} P_{i+1}(t)$ où $P_{i+1}(t)$ est un polynôme de degré inférieur à r_k (au plus égal à $r_k - 1$). L'argument s'applique de la même façon à toute valeur propre λ_k.

Remarque 3. *Dans le cas où la matrice de transition est diagonalisable, tout est beaucoup plus simple que dans le théorème 2 car toutes les blocs sont de dimension 1. En effet, dans ce cas le terme polynomial associé à l'exponentiel n'apparaît pas (au delà de la constante) car il n'y a pas de substitution de la solution pour* $y_j(t)$ $(j \geq i)$ *dans l'équation* $i-1$.

Exemple 3. *Soit le système dynamique* $\dot{X}(t) = AX(t)$ *avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que la solution, étant donnée une condition initiale $X_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$, *a la forme suivante :*

$$X(t) = \frac{x_{1,0} + x_{2,0} - 2x_{3,0}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{x_{1,0} + x_{3,0} - 2x_{2,0}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{x_{1,0} + x_{2,0} + x_{3,0}}{3} e^{-\frac{5t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 3 (éléments de preuve)**.** *Les valeurs propres de la matrice A sont $-1/2$, $-1/2$ et $5/2$. Cette matrice est diagonalisable car on peut trouver trois vecteurs propres linéarement indépendants :*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où la solution :

$$X(t) = \alpha e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En évaluant cette solution générale en $t = 0$ et en comparant avec la condition initiale X_0 on identifie les coefficients α, β et γ. □

Une équation différentielle faisant intervenir linéairement le niveau de x et ses n premières dérivées est une équation différentielle linéaire d'ordre n. On supposera que celle-ci s'écrit sous la forme suivante (en normalisant le coefficient sur la dérivée n-ième) :

$$x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_n x(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{8}$$

On supposera aussi que $a_n \neq 0$, sinon il s'agit d'une équation différentielle d'ordre $n-1$ en posant $y(t) = \dot{x}(t)$.

On suppose, pour l'instant, que cette équation n'admet pas de second membre. L'introduction d'un second membre variable ne pose pas de problème spécifique (on procède alors en deux étapes comme d'habitude : solution particulière de l'équation comlplète + solution générale de l'équation sans second membre).

L'équation différentielle linéaire d'ordre n (8) admet une représentation matricielle.

L'équation différentielle (8) est équivalente au système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \cdots + a_n x_n(t) \\ \dot{x}_2(t) & = x_1(t) \\ \vdots & \\ \dot{x}_n(t) & = x_{n-1}(t) \end{cases} \tag{9}$$

Soit, en posant $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))'$, de façon équivalente

$$\dot{X}(t) = AX(t) \tag{10}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_n \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 3. *L'ensemble des solutions réelles (complexes) de l'équation différentielle linéaire d'ordre n (8) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) de dimension n. Les conditions initiales $x(0)$, $x^{(1)}(0)$, ..., $x^{(n-1)}(0)$ déterminent une unique solution.*

Propriété 4. *Le polynôme caractéristique de la matrice A dans le système (10) équivalent à l'équation différentiel linéaire d'ordre n est :*

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \cdots - a_{n-1}\lambda - a_n) \tag{11}$$

Preuve 5 (de la propriété 3). *Direct par la propriété 2.* □

Preuve 6 (de la propriété 4). *On a :*

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -\lambda & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

En multipliant la dernière colonne par $^1/_\lambda$ et en remplaçant l'avant dernière colonne par l'avant dernière colone plus la dernière transformée, on a de façon équivalante :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \dots & a_{n-1} + \frac{a_n}{\lambda} & \frac{a_n}{\lambda} \\ 1 & -\lambda & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

En remontant vers la première colonne en appliquant toujours cette même transformation, *on a encore :*

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda + \frac{a_2}{\lambda} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda^{n-1}} & a_2 + \frac{a_3}{\lambda} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda^{n-2}} & \dots & a_{n-1} + \frac{a_n}{\lambda} & \frac{a_n}{\lambda} \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ainsi, calculer le déterminant de A revient à calculer le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (c'est-à-dire en faire le produit des éléments sur cette matrice). Nous avons donc :

$$\chi_A(\lambda) = \left(a_1 - \lambda + \frac{a_2}{\lambda} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda^{n-1}}\right) \times (-1)^{n-1}$$

En multipliant par $-\lambda^{n-1}$ on retrouve (11). $\square$

On suppose que $\chi_A(\lambda)$ possède $m \leq n$ racines distinctes (il s'agit aussi des valeurs propres de la matrice A) λ_k de multiplicité r_k ($\sum_{k=1}^{m} r_k = n$).

Propriété 5. *La solution générale de l'équation différentielle linéaire d'ordre n sans second membre (8) est :*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=0}^{r_k - 1} \alpha_{kp} t^p e^{\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{12}$$

Preuve 7 (de la propriété 6)**.** *Direct en appliquant le théorème 2 au système (10).* □

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre n suivante :

$$x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_n x(t) + b(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (13)$$

où $\{a_i \in \mathbb{R}; i = 1, \ldots, n\}$, $a_n \neq 0$ et $b(t)$ une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

En ajoutant à une solution particulière $\psi(t)$ de l'équation complète (13) la solution générale de l'équation sans second membre (8), on obtient la solution générale de (13). En effet, $x(t)$ est solution de (13) si et seulement si $x(t) - \psi(t)$ est solution de (8). Il ne reste alors plus qu'à déterminer les n paramètres d'intégration à l'aide de la condition initiale.

Propriété 6. *Dans le cas* $\psi(t) = e^{bt}Q(t)$, *où* Q *est un polynôme d'ordre* n *en* t, *l'équation différentielle linéaire avec second membre (13) admet une solution particulière de la forme* $e^{bt}R(t)$ *ou* $t^r e^{bt}R(t)$, *avec* R *un polynôme de degré* n *en* t, *selon que* b *n'est pas racine ou est racine d'ordre* r *du polynôme caractéristique (11).*

On s'intéresse au système

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{14}$$

Définition 2. *On dit que la matrice réelle $n \times n$ A est* d-*stable (différentiellement stable) si toute solution $X(t)$ de (14) tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.*

On dit alors que l'état stationnaire nul de (14) est globalement stable.

Plus généralement, une dynamique de la forme $\dot{X}(t) = AX(t) + b$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $X^\star$ une solution constante c'est-à-dire une un point de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $AX^\star + B = 0$ ($\Leftrightarrow X^\star = A^{-1}B$ si A est de plein rang). L'état stationnaire $X^\star$ est globalement stable dans $\mathbb{R}^n$ si pour toute condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^n$, la solution de $\dot{X}(t) = AX(t) + B$ telle que $X(0) = X_0$ tend vers $X^\star$ quand t tend vers $+\infty$. $X^\star$ **est globalement stable si et seulement si A est d-stable.**

Théorème 3. *Pour que la matrice A soit* d-*stable, il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres soient de partie réelle négative.*

Cas particuliers :

- $n = 1$, $A = (a)$ est d-stable ssi $a < 0$.
- $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est d-stable ssi $\mathrm{tr}(A) < 0$ et $|A| > 0$.
- Une matrice symétrique A est d-stable si et seulement si les déterminants de ses mineurs principaux vérifient :

$$(-1)^p \left|A_{1:p}\right| > 0 \quad \text{pour tout} 1 \leq p \leq n$$

Proposition 1. *Pour que le polynôme $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ ait ses racines de partie réelle négatives, il faut et il suffit que ses coefficients vérifient : $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $ab > c$*

Preuve 8 (du théorème 3)**.** *On aborde établit la condition nécéssaire et suffisante donnée dans le théorème en établissant successivement la condition nécessaire et la condition suffisante.*

Condition nécéssaire. *On suppose que la matrice A est* d-*stable. Soit $\lambda = a + \mathrm{i}b$ une valeur propre de A ; soit $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé (il vérifie donc $Av = \lambda v$). Alors $Z(t) = e^{\lambda t}v$ est une solution (complexe) de (14), car nous avons :*

$$\dot{Z}(t) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v = AZ(t)$$

Soit v_i un élément non nul de v (une coordonnée). La fonction complexe $z_i(t) = v_i e^{\lambda t}$ tend vers 0, ce qui implique que $|z_i(t)| = |v_i| e^{at}$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini (puisque A est d-*stable), donc que a est négatif.*

Condition suffisante. *On suppose que toutes les valeurs propres λ_k de multiplicité r_k de A sont de parties réelles négatives $a_k < 0$ ($k = 1, \ldots, m$). Soit $X(t)$ une solution de (14). Alors, pour chaque coordonnées $x_i(t)$ de $X(t)$, on a :*

$$|x_i(t)| = \left| \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t} P_{i,k}(t) \right| \leq \sum_{k=1}^{m} e^{a_k t} \left| P_{i,k}(t) \right|$$

et $a_k < 0$ ($k = 1, \ldots, m$) implique donc que $x_i(t)$ converge vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Ainsi $X(t)$ tend vers zéro et la matrice A est d-*stable.* □

Preuve 9 (de la proposition 1)**.** *Poser trois racines (dans $\mathbb{C}$) λ_1, λ_2 et λ_3 du polynôme. Puis par identification en développant $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ exprimer a, b et c en fonction* *des racines. Montrer que* $ab - c = -(\lambda_2 + \lambda_3)(b + \lambda_1^2)$. *Ensuite discuter en fonction de la nature des racines (trois réelles ou deux complexes conjuguées et une réelle).*

Propriété 7. *Si la matrice carrée $n \times n$ A à éléments réels est* d-*stable, alors sa trace est négative et son déterminant est du signe de* $(-1)^p$ *:*

Propriété 8. *Si le polynôme $\chi_A(\lambda)$ a toutes ses racines de partie réelle négative, alors tous les coefficients de $\chi_A(\lambda)$ ont le même signe.*

Définition 3. *Une matrice carrée $n \times n$ $A = ((a_{ij}))$ à éléments réels est à diagonale négative dominante s'il existe n nombres $d_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, tels que l'on a :*

$$-d_i a_{ii} > \sum_{j \neq i} d_i |a_{ij}|, \quad 1 \leq ileqn$$

Propriété 9. *Une matrice à diagonale négative dominante est* d-*stable.*

Preuve 10 (de la propriété 7). *Direct en remarquant que la trace est la somme des valeurs propres et que le déterminant est le produit des valeurs propres (on sait aussi que si $x = a+\mathrm{i}b$ et si $y = a - \mathrm{i}b$ avec $a < 0$, alors $x + y < 0$ et $xy > 0$).*

Preuve 11 (de la propriété 8). *Nous avons :*

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n) \\ &= (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n)\end{aligned}$$

Si $\lambda_1 < 0$, les coefficients de $\lambda - \lambda_1$ sont positifs ; si $\lambda_1 = a + \mathrm{i}b$ et $a < 0$, on a : $(\lambda - a - \mathrm{i}b)(\lambda - a + \mathrm{i}b) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$ où les coefficients sont tous positifs. Ainsi le produit $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n)$ est égal au produit de polynômes du premier degré et du second degré à coefficients réels positifs. On en déduit que tous les coefficients de

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

ont le même signe. □

Preuve 12 (de la propriété 9). *Soit la valeur propre complexe $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ de A et v son vecteur propre, nous avons donc $Av = \lambda v$. Choisissons un indice k tel que ${}^{|v_k|}/_{d_k} = \max_j\{{}^{|v_j|}/_{d_j}, 1 \leq j \leq n\}$ où v_i est la i-ème coordonnée de v. On a :*

$$|(\lambda - a_{kk})v_k| = \left|\sum_{j \neq k} a_{kj}v_j\right| \leq \sum_{j\neq k} |a_{kj}|d_j\,\frac{v_k}{d_k}$$

On déduit de $|v_k| \neq 0$ *et de la définition d'une matrice à diagonale négative dominante :*

$$|(\lambda - a_{kk})v_k| \leq |a_{kj}|d_j < -a_{kk}d_k$$

D'où

$$\alpha - a_{kk} \leq |\alpha - a_{kk}| \leq |\lambda - a_{kk}| < -a_{kk}$$

et $\alpha < 0$. □

CNS de Routh-Hurwitz

Soit $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$. On construit la matrice suivante :

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-3} & a_{2n-3} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-4} & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-5} & a_{2n-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2n-} & a_{2n-4} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

où $a_{n+i} = 0$ pour $i = 1, \dots, n-1$. On peut montrer qu'une condition nécéssaire est suffisante pour que toutes les racines du polynôme soient de parties réelles négatives est que tous les déterminants des mineurs principaux de R soient positifs.

Exemple 4. *Dans le cas d'un polynôme d'ordre 2* ($\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$)*, nous avons :*

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Les racines sont de parties réelles négatives si et seulement si :

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1 a_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

nous retrouvons la condition évoquée à la fin du chapitre 1.

Exemple 5. *Dans le cas d'un polynôme d'ordre 3* $(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3)$, *nous avons :*

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

En appliquant les conditions de Routh-Hurwitz on retrouve la proposition 1.