MOMENTS D'ORDRE 1 & 2 D'UN PROCESSUS ARMA(1,1)

UNIVERSITÉ DU MAINE

Soit $(y_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique défini par :

$$y_t - \varphi y_{t-1} = \xi + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} \tag{1}$$

On suppose que $\varphi \neq \theta$, $\varphi < 1$, $\theta < 1$, $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2, $\xi \in \mathbb{R}$. On suppose que la condition initiale est telle que ce processus ARMA(1,1) est stationnaire au second ordre, c'est-à-dire telle que les moments s d'ordre 1 et 2 sont invariants[1]. Notons μ_y, σ_y^2 et $\gamma_y(h)$ respectivement l'espérance, la variance et la fonction d'auto-covariance de ce processus. Puisque ce processus est stationnaire, en appliquant l'opérateur espérance à l'équation (1) on a directement :

$$\mu_y - \varphi \mu_y = \xi$$

Ainsi nous avons :

$$\mu_y = \frac{\xi}{1 - \varphi} \tag{2}$$

En exprimant ξ en fonction de l'espérance, on peut réécrire l'équation (1) de façon équivalente :

$$y_t = \mu_y(1 - \varphi) + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

soit encore

$$y_t - \mu_y = \varphi(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} \tag{3}$$

En multipliant (3) par $y_t - \mu_y$ il vient :

$$(y_t - \mu_y)^2 = \varphi(y_t - \mu_y)(y_{t-1} - \mu_y) + (y_t - \mu_y)\varepsilon_t - \theta(y_t - \mu_y)\varepsilon_{t-1}$$

[1] Il faut que y_0 soit une variable aléatoire dont l'espérance et la variance correspondent aux moments asymptotiques d'ordre un et deux du processus ARMA, plus bas notés μ_y et σ_y^2.

En appliquant l'opérateur espérance :

$$\gamma_y(0) = \varphi\gamma_y(1) + \mathbb{E}\left[(y_t - \mu_y)\varepsilon_t\right] - \theta\mathbb{E}\left[(y_t - \mu_y)\varepsilon_{t-1}\right]$$

Il nous reste à évaluer les deux espérances, qui ne sont pas nulles a priori car $(y_t - \mu_y)$ dépend de ε_t et ε_{t-1} (voir l'équation (3)). Dans le premier cas nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(y_t - \mu_y)\varepsilon_t\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\varphi(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}\right)\varepsilon_t\right] \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

car ε_t est une innovation (orthogonalité par rapport au passé de y_t). Pour la deuxième espérance, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(y_t - \mu_y)\varepsilon_{t-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\varphi(y_{t-1} - \mu_y) + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}\right)\varepsilon_{t-1}\right] \\ &= \varphi\mathbb{E}\left[(y_{t-1} - \mu_y)\varepsilon_{t-1}\right] - \theta\sigma^2 \\ &= \varphi\mathbb{E}\left[\left(\varphi(y_{t-2} - \mu_y) + \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2}\right)\varepsilon_{t-1}\right] - \theta\sigma^2 \\ &= (\varphi - \theta)\sigma^2\end{aligned}$$

Ainsi nous avons :

$$\gamma_y(0) = \varphi\gamma_y(1) + \sigma^2(1 + \theta^2 - \varphi\theta) \tag{4}$$

En multipliant (3) par $y_{t-1} - \mu_y$ il vient :

$$(y_t - \mu_y)(y_{t-1} - \mu_y) = \varphi(y_{t-1} - \mu_y)^2 + (y_{t-1} - \mu_y)\varepsilon_t - \theta(y_{t-1} - \mu_y)\varepsilon_{t-1}$$

En appliquant l'opérateur espérance :

$$\gamma_y(1) = \varphi\gamma_y(0) + \mathbb{E}\left[(y_{t-1} - \mu_y)\varepsilon_t\right] - \theta\mathbb{E}\left[(y_{t-1} - \mu_y)\varepsilon_{t-1}\right]$$

La première espérance est nulle car $(y_{t-1} - \mu_y)$ est non corrélé avec ε_t. En exprimant $(y_{t-1} - \mu_y)$ en fonction de y_{t-2}, ε_{t-1} et ε_{t-2}, on montre facilement que la deuxième espérance est égale à σ^2. Nous avons donc :

$$\gamma_y(1) = \varphi\gamma_y(0) - \theta\sigma^2 \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) forment un système de deux équations avec deux inconnues : $\gamma_y(0)$ et $\gamma_y(1)$:

$$\begin{cases} \gamma_y(0) & = \varphi\gamma_y(1) + \sigma^2(1 + \theta^2 - \varphi\theta) \\ \gamma_y(1) & = \varphi\gamma_y(0) - \theta\sigma^2 \end{cases}$$

En substituant la deuxième équation dans la première, il vient :

$$\gamma_y(0) = \varphi\left(\varphi\gamma_y(0) + \sigma^2\right) + \sigma^2(1 + \theta^2 - \varphi\theta)$$

soit de façon équivalente :

$$\left(1-\varphi^2\right)\gamma_y(0) = \sigma^2(1+\theta^2-2\varphi\theta)$$

ou encore :

$$\gamma_y(0) = \sigma^2\frac{\theta^2-2\varphi\theta+1}{1-\varphi^2}$$

En substituant dans la seconde équation du système, nous obtenons finalement :

$$\left\{\begin{array}{ll} \gamma_y(0) & = \sigma^2\frac{\theta^2-2\varphi\theta+1}{1-\varphi^2} \equiv \sigma_y^2 \\ \gamma_y(1) & = \varphi\gamma_y(0) - \theta\sigma^2 \end{array}\right. \tag{6}$$

Calculons l'auto-covariance d'ordre h pour $|h| \geq 2$. En multipliant (3) par $(y_{t-h}-\mu_y)$, il vient :

$$(y_t-\mu_y)(y_{t-h}-\mu_y) = \varphi(y_{t-1}-\mu_y)(y_{t-h}-\mu_y)+(y_{t-h}-\mu_y)\varepsilon_t-\theta(y_{t-h}-\mu_y)\varepsilon_{t-1}$$

En appliquant l'opérateur espérance :

$$\gamma_y(h) = \varphi\gamma_y(h-1) + \mathbb{E}\left[(y_{t-h}-\mu_y)\varepsilon_t\right] - \theta\mathbb{E}\left[(y_{t-h}-\mu_y)\varepsilon_{t-1}\right]$$

Les deux espérances sont nulles dès lors que $h > 1$, la fonction d'auto-covariance est finalement donnée par :

$$\left\{\begin{array}{ll} \gamma_y(0) & = \sigma^2\frac{\theta^2-2\varphi\theta+1}{1-\varphi^2} \\ \gamma_y(1) & = \varphi\gamma_y(0) - \theta\sigma^2 \\ \gamma_y(h) & = \varphi\gamma_y(h-1) \quad \forall|h|>1 \end{array}\right. \tag{7}$$

On vérifie que nous retrouvons bien la fonction d'auto-covariance d'une processus AR(1) lorsque θ est nul ou la fonction d'autocovariance du MA(1) lorsque φ est nul. De façon générale, dès lors que l'horizon h est supérieur à l'ordre de la partie MA (1 dans le cas qui nous intéresse), le retour à zéro de la fonction d'auto-covariance est gouverné par la partie AR (dynamique géométrique).