MOMENTS D'ORDRE 1 & 2 D'UN PROCESSUS ARMA(1,2)

UNIVERSITÉ DU MAINE

Soit $(y_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique défini par :

$$y_t - \varphi y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \tag{1}$$

On suppose que $\varphi < 1$, et que les solutions de $1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 = 0$ sont plus grandes que un en module et différentes de $1/\varphi$ (la racine du polynôme retard associé à la partie AR). On suppose aussi que $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2. Ainsi le processus ARMA(1,2) est *asymptotiquement* stationnaire au second ordre et on supposera que la condition initiale est telle que les moments du processus sont invariants (stationnarité au second ordre). Notons μ_y, σ_y^2 et $\gamma_y(h)$ respectivement l'espérance, la variance et la fonction d'auto-covariance de ce processus. Puisque ce processus est stationnaire au second ordre, en appliquant l'opérateur espérance à l'équation (1) on a directement :

$$\mu_y - \varphi \mu_y = 0$$

Comme cette équation doit être vérifiée pour toute valeur admissible de φ on a nécessairement :

$$\mu_y = 0 \tag{2}$$

Le processus ARMA(1,2) considéré ici est d'espérance nulle (ce résultat était attendu puisqu'il n'y a pas de constante dans le modèle défini par l'équation (1)).

La fonction d'auto-covariance est définie par :

$$\gamma_y(h) = \mathbb{E}\left[(y_t - \mu_y)(y_{t-h} - \mu_y)\right] = \mathbb{E}\left[y_t y_{t-h}\right]$$

La deuxième égalité est justifiée par le fait que le processus considéré est d'espérance nulle. En particulier la variance est définie par :

$$\sigma_y^2 \equiv \gamma_y(0) = \mathbb{E}\left[y_t y_{t-h}\right]$$

1. En multipliant (1) par y_t il vient :

$$y_t^2 = \varphi y_t y_{t-1} + y_t \varepsilon_t - \theta_1 y_t \varepsilon_{t-1} - \theta_2 y_t \varepsilon_{t-2}$$

En appliquant l'opérateur espérance :

$$\gamma_y(0) = \varphi \gamma_y(1) + \mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_t\right] - \theta_1 \mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_{t-1}\right] - \theta_2 \mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_{t-2}\right]$$

Il nous reste à évaluer les trois espérances, qui ne sont pas nulles a priori car y_t dépend de ε_t, ε_{t-1} et ε_{t-2} (voir l'équation (1)).

– Pour la première espérance nous avons :

$$\mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_t\right] = \mathbb{E}\left[\varphi y_{t-1} \varepsilon_t\right] + \mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2\right] - \theta_1 \mathbb{E}\left[\varepsilon_{t-1} \varepsilon_t\right] - \theta_2 \mathbb{E}\left[\varepsilon_{t-2} \varepsilon_t\right]$$

les deux derniers termes sont nuls car ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle. Le deuxième terme est égal à σ^2 pour tout t car ε_t est un bruit blanc de variance σ^2. Enfin, le premier terme est nul car l'innovation ε est indépendante du passé de y. Ainsi nous avons :

$$\mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_t\right] = \sigma^2 \quad \forall t$$

– Pour la deuxième espérance nous avons :

$$\mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_{t-1}\right] = \mathbb{E}\left[\varphi y_{t-1} \varepsilon_{t-1}\right] + \mathbb{E}\left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}\right] - \theta_1 \mathbb{E}\left[\varepsilon_{t-1}^2\right] - \theta_2 \mathbb{E}\left[\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-1}\right]$$

La première espérance est égale à σ^2 puisque $\mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_t\right] = \sigma^2$ *pour tout* t. La deuxième espérance est nulle car ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle. La troisième espérance est égale à σ^2. Enfin, la dernière espérance est nulle car ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle. Ainsi nous avons :

$$\mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_{t-1}\right] = (\varphi - \theta_1)\sigma^2 \quad \forall t$$

– Pour la troisième espérance nous avons :

$$\mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_{t-2}\right] = \varphi \mathbb{E}\left[y_{t-1} \varepsilon_{t-2}\right] + \mathbb{E}\left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}\right] - \theta_1 \mathbb{E}\left[\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}\right] - \theta_2 \mathbb{E}\left[\varepsilon_{t-2}^2\right]$$

La dernière espérance est égale à σ^2 et les deux précédentes sont nulles. La première espérance est égale à $(\varphi - \theta_1)\sigma^2$ car $\mathbb{E}\left[y_{t-1} \varepsilon_{t-2}\right] = \mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_{t-1}\right]$. Au total nous avons :

$$\mathbb{E}\left[y_t \varepsilon_{t-2}\right] = \left(\varphi(\varphi - \theta_1) - \theta_2\right) \sigma^2 \quad \forall t$$

En utilisant ces résultats intermédiaires nous obtenons :

$$\gamma_y(0) = \varphi\gamma_y(1) + [1 - \theta_1(\varphi - \theta_1) - \theta_2(\varphi(\varphi - \theta_1) - \theta_2)]\,\sigma^2 \qquad (3)$$

Nous disposons d'une expression de $\gamma_y(0)$ en fonction de $\gamma_y(1)$, qui est inconnu, et de σ^2, φ, θ_1 et θ_2 qui sont connus.

2. Afin d'obtenir une équation pour l'autocovariance d'ordre un, multiplions (1) par y_{t-1} :

$$y_t y_{t-1} = \varphi y_{t-1}^2 + y_{t-1}\varepsilon_t - \theta_1 y_{t-1}\varepsilon_{t-1} - \theta_2 y_{t-1}\varepsilon_{t-2}$$

En appliquant l'opérateur espérance, il vient :

$$\gamma_y(1) = \varphi\gamma_y(0) + \mathbb{E}\left[y_{t-1}\varepsilon_t\right] - \theta_1\mathbb{E}\left[y_{t-1}\varepsilon_{t-1}\right] - \theta_2\mathbb{E}\left[y_{t-1}\varepsilon_{t-2}\right]$$

La première espérance est nulle car car l'innovation ε est indépendante du passé de y, la deuxième espérance est égale à σ^2 car $\mathbb{E}\left[y_{t-1}\varepsilon_{t-1}\right] = \mathbb{E}\left[y_t\varepsilon_t\right] = \sigma^2$, enfin nous avons déjà rencontré la troisième espérance qui est égale à $(\varphi - \theta_1)\sigma^2$. Au total, nous obtenons l'équation suivante pour :

$$\gamma_y(1) = \varphi\gamma_y(0) - \theta_1\sigma^2 - \theta_2(\varphi - \theta_1)\sigma^2 \qquad (4)$$

Les équations (3) et (4) forment un système de deux équations avec deux inconnues ($\gamma_y(0)$ et $\gamma_y(1)$) :

$$\begin{cases} \gamma_y(0) & = \varphi\gamma_y(1) + [1 - \theta_1(\varphi - \theta_1) - \theta_2(\varphi(\varphi - \theta_1) - \theta_2)]\,\sigma^2 \\ \gamma_y(1) & = \varphi\gamma_y(0) - [\theta_1 + \theta_2(\varphi - \theta_1)]\,\sigma^2 \end{cases}$$

On obtient $\gamma_y(0)$ en substituant la deuxième équation dans la première, puis en substituant l'expression de $\gamma_y(0)$ dans la deuxième équation on obtient $\gamma_y(1)$ (les calculs sont laissés aux lecteurs).

Puisque la partie MA est d'ordre 2, celle-ci devrait aussi affecter l'autocovariance d'ordre 2 ; ensuite, pour $h > 2$, la fonction d'autocovariance sera déterminée par la partie AR (retour géométrique à zéro).

Calculons l'autocovariance d'ordre 2. Pour cela nous suivons la démarche habituelle en multipliant (1) par y_{t-2} puis en appliquant l'opérateur espérance. Nous avons donc :

$$\gamma_y(2) = \varphi\gamma_y(1) + \mathbb{E}\left[\epsilon_t y_{t-2}\right] - \theta_1\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-1}y_{t-2}\right] - \theta_2\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-2}y_{t-2}\right]$$

c'est-à-dire :

$$\gamma_y(2) = \varphi\gamma_y(1) - \theta_2\sigma^2$$

puisque les autres espérances sont nulles.

Pour le reste on montre facilement que pour tout $h > 2$ nous avons

$$\gamma_y(h) = \varphi\gamma_y(h-1)$$

On vérifie que nous retrouvons bien la fonction d'auto-covariance d'une processus AR(1) lorsque θ_1 et θ_2 sont nuls ou la fonction d'autocovariance du MA(2) lorsque φ est nul.