Le processus AR(p)

Stéphane Adjemian

Université Maine, GAINS & CEPREMAP

24 avril 2008

– $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus auto-régressif d'ordre p>0, on note AR(p), s'il est défini par :

$$y_t = \theta + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i y_{t-i} + \epsilon_t$$

où $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$ est l'innovation du processus (*ie* la part de y_t non prédictible à partir de $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$), et où les paramètres φ_i et θ sont réels et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$.

– On note L l'opérateur retard, *ie* pour un processus X_t quelconque on a $LX_t = X_{t-1}$ et plus généralement $L^i X_t = X_{t-i}$ pour tout i entier.

– Le polynôme retard associé à l'AR(p) est défini par :

$$A(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p$$

– Le polynôme caractéristique associé à l'AR(p) est défini par :

$$\chi(z) = z^p - \varphi_1 z^{p-1} - \varphi_2 z^{p-2} - \cdots - \varphi_{p-1} z - \varphi_p$$

– Les polynômes $A(z)$ et $\chi(z)$ sont utilisés pour donner une condition de stationnarité au second ordre.

Proposition 1. Si $\tilde{z}$ est une racine du polynôme retard alors ${}^1/_{\tilde{z}}$ est une racine du polynôme caractéristique.

Preuve. Notons que $\tilde{z}$ est une racine du polynôme retard ssi $A(\tilde{z}) = 0$, c'est-à-dire ssi :

$$1 - \varphi_1 \tilde{z} - \varphi_2 \tilde{z}^2 - \cdots - \varphi_p \tilde{z}^p = 0$$

ou de façon équivalente en factorisant (la racine $\tilde{z}$ est non nulle) :

$$\tilde{z}^p \left[\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^p - \varphi_1 \left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^{p-1} - \varphi_2 \left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^{p-2} - \cdots - -\varphi_{p-1} \left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) - \varphi_p \right] = 0$$

soit encore :

$$\tilde{z}^p \chi \left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) = 0$$

Puisque $\tilde{z}^p \neq 0$, pour que l'égalité soit vérifiée il faut que $\chi\left({}^1/_{\tilde{z}}\right)$ soit nul, c'est-à-dire que ${}^1/_{\tilde{z}}$ soit une racine du polynôme caractéristique.

Proposition 2. Le processus AR(p) est asymptotiquement stationnaire au second ordre si et seulement si les racines du polynôme retard sont à l'extérieur du cercle unité, c'est-à-dire plus grande que l'unité en module.

Proposition 3. Le processus AR(p) est asymptotiquement stationnaire au second ordre si et seulement si les racines du polynôme caractéristique sont à l'intérieur du cercle unité, c'est-à-dire plus petite que l'unité en module.

– Soit le processus AR(2) :

$$y_t = \theta + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec θ, φ_1 et φ_2 des paramètres réels et $\varepsilon_t \underset{iid}{\sim} BB(0, \sigma^2)$.

– On suppose que le processus est asymptotiquement stationnaire au second ordre.

– On a vu en cours que cela revient à poser des contraintes sur les paramètres φ_1 et φ_2 qui doivent être dans le « triangle de stabilité ».

– Nous supposons que les conditions initiales sont telles que les moments d'ordre un et deux sont invariants.

- Notons $\mu \equiv \mathbb{E}\left[y_t\right]$ l'espérance de y_t.

- En appliquant l'opérateur espérance à la définition du processus et en utilisant la notation précédente vient directement :

$$\mu = \theta + \varphi_1 \mu + \varphi_2 \mu$$

- On obtient :

$$\mu \equiv \mathbb{E}\left[y_t\right] = \frac{\theta}{1 - \varphi_1 - \varphi_2}$$

- On note que dans le cas où $\varphi_2 = 0$ on retrouve le même résultat que pour l'AR(1).

– L'autocovariance d'ordre h est définie par :

$$\gamma(h) = \mathbb{E}\left[(y_t - \mu)(y_{t+h} - \mu)\right]$$

– En définissant $z_t = y_t - \mu$ comme le processus centré (on retire l'espérance), on peut définir l'autocovariance d'ordre h de façon équivalente :

$$\gamma(h) = \mathbb{E}\left[z_t z_{t+h}\right]$$

– Il nous reste à caractériser le processus centré. Pour cela il suffit de substituer $\theta = (1 - \varphi_1 - \varphi_2)\mu$ dans le processus AR(2).

– Nous avons :

$$y_t = (1 - \varphi_1 - \varphi_2)\mu + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

soit de façon équivalente :

$$y_t = \mu + \varphi_1(y_{t-1} - \mu) + \varphi_2(y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t$$

ou encore :

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \varepsilon_t$$

– Ainsi le processus centré $\{z_t\}$ est un processus AR(2) avec les mêmes paramètres auto-régressifs que le processus $\{y_t\}$.

– Nous avons :

$$z_t^2 = \varphi_1 z_{t-1} z_t + \varphi_2 z_{t-2} z_t + \varepsilon_t z_t$$

– En appliquant l'opérateur espérance, il vient :

$$\gamma_0 = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(2) + \mathbb{E}[(\varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \varepsilon_t)\varepsilon_t]$$

– ou encore :

$$\gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(2) + \sigma^2$$

– Nous avons exprimé $\gamma(0)$ en fonction de $\gamma(1)$ et de $\gamma(2)$ qui sont inconnus... Il nous reste à obtenir des équations pour $\gamma(1)$ et de $\gamma(2)$.

– On obtient une équation pour $\gamma(1)$ en multipliant l'équation de z_t par z_{t-1} et en appliquant l'opérateur espérance. Nous avons :

$$z_t z_{t-1} = \varphi_1 z_{t-1}^2 + \varphi_2 z_{t-2} z_{t-1} + \varepsilon_t z_{t-1}$$

– En appliquant l'opérateur espérance, il vient :

$$\gamma(1) = \varphi_1 \gamma(0) + \varphi_2 \gamma(1) + \mathbb{E}[(\varphi_1 z_{t-2} + \varphi_2 z_{t-3} + \varepsilon_{t-1})\varepsilon_t]$$

– ou encore :

$$\gamma(0) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(2)$$

puisque l'espérance de $z_{t-1}\varepsilon_t$ est nulle (ε_t est une innovation).

– On obtient une équation pour $\gamma(2)$ de la même façon. Nous avons :

$$z_t z_{t-2} = \varphi_1 z_{t-1} z_{t-2} + \varphi_2 z_{t-2}^2 + \varepsilon_t z_{t-2}$$

– En appliquant l'opérateur espérance, il vient :

$$\gamma(2) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(0) + \mathbb{E}[(\varphi_1 z_{t-3} + \varphi_2 z_{t-4} + \varepsilon_{t-1})\varepsilon_t]$$

– ou encore :

$$\gamma(2) = \varphi_1 \gamma(1) + \varphi_2 \gamma(0)$$

puisque l'espérance de $z_{t-2}\varepsilon_t$ est nulle (ε_t est une innovation).

– Au final, nous disposons de trois équations pour trois inconnues :

$$\begin{cases} \gamma(0) & = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(2) + \sigma^2 \\ \gamma(1) & = \varphi_1\gamma(0) + \varphi_2\gamma(1) \\ \gamma(2) & = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(0) \end{cases}$$

– On peut réécrire la seconde équation sous la forme :

$$\gamma(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma(0)$$

– En substituant dans la dernière équation, il vient :

$$\gamma(2) = \left(\frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} + \varphi_2\right)\gamma(0)$$

– Finalement, en substituant les expressions de $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$ dans la première équation, on obtient :

$$\gamma(0) = \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2}\gamma(0) + \varphi_2\left(\frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} + \varphi_2\right)\gamma(0) + \sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\left[1 - \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2}(1+\varphi_2) - \varphi_2^2\right] = \sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\left[(1-\varphi_2)(1+\varphi_2) - \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2}(1+\varphi_2)\right] = \sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\,(1+\varphi_2)\left[1-\varphi_2 - \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2}\right] = \sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\frac{1+\varphi_2}{1-\varphi_2}\left[(1-\varphi_2)^2 - \varphi_1^2\right] = \sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0)\frac{1+\varphi_2}{1-\varphi_2}\left[(1-\varphi_2-\varphi_1)(1+\varphi_1-\varphi_2)\right] = \sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) = \frac{(1-\varphi_2)\sigma^2}{(1+\varphi_2)(1-\varphi_2-\varphi_1)(1+\varphi_1-\varphi_2)}$$

- On obtient facilement $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$ à partir de $\gamma(0)$.
- Plus généralement, on utilise la récurrence suivante pour compléter la fonction d'autocovariance :

$$\gamma(h) = \varphi_1\gamma(h-1) + \varphi_2\gamma(h-2)$$

– Soit le processus AR(p) défini par :

$$y_t = \theta + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i y_{t-i} + \epsilon_t$$

– On suppose que le processus est asymptotiquement stationnaire au second ordre et les conditions initiales sont telles que les moments d'ordre un et deux sont invariants.

– Posons $\mu \equiv \mathbb{E}[y_t]$ pour tout t. En appliquant l'opérateur espérance on obtient facilement :

$$\mu = \frac{\theta}{1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i}$$

– La fonction d'autocovariance est définie par :

$$\gamma(h) = \mathbb{E}\left[z_t z_{t+h}\right]$$

où $z_t = y_t - \mu$ pour tout t est le processus centré.

– En utilisant la même astuce que pour l'AR(2) on montre facilement que :

$$z_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i z_{t-i} + \epsilon_t$$

– Pour calculer l'autocovariance d'ordre h, notons que l'on a :

$$z_{t-h} z_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i z_{t-h} z_{t-i} + z_{t-h} \epsilon_t$$

– En prenant l'espérance il vient :

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \gamma(h-i) + \mathbb{E}\left[z_{t-h}\epsilon_t\right]$$

– Supposons $h \geq 0$ (pas d'importance car la fonction d'autocovariance est symétrique).

– Pour tout $0 \leq h < p$ on va trouver quelques $\gamma(j)$ avec $j < 0$ sur le membre de droite. Par symétrie de la fonction d'autocovariance, on remplace alors $\gamma(j)$ par $\gamma(-j)$ sans affecter l'équation.

– Le dernier terme, $\mathbb{E}\left[z_{t-h}\epsilon_t\right]$, est non nul seulement pour $h = 0$ (car ϵ_t est une innovation).

– Ainsi nous avons le système de $h+1$ équations :

$$\begin{cases} \gamma(0) & = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(2) + \ldots \varphi_{p-1}\gamma(p-1) + \varphi_p\gamma(p) + \sigma^2 \\ \gamma(1) & = \varphi_1\gamma(0) + \varphi_2\gamma(1) + \ldots \varphi_{p-1}\gamma(p-2) + \varphi_p\gamma(p-1) \\ \gamma(2) & = \varphi_1\gamma(1) + \varphi_2\gamma(0) + \ldots \varphi_{p-1}\gamma(p-3) + \varphi_p\gamma(p-2) \\ & \vdots \\ \gamma(p) & = \varphi_1\gamma(p-1) + \varphi_2\gamma(p-2) + \ldots \varphi_{p-1}\gamma(1) + \varphi_p\gamma(0) \end{cases}$$

– On obtient $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, …, $\gamma(p)$ (fonctions des φ_i et de σ^2) en résolvant ce système d'équations.
– Il est possible de le faire matriciellement, mais c'est un peu compliqué...
– On complète la fonction d'autocovariance par récurrence.