Rappels sur les équations différentielles linéaires

Stéphane Adjemian

Université du Maine, GAINS & CEPREMAP

stephane.adjemian@ens.fr

20 septembre 2010

Définition 1. *La fonction réelle $x(t)$ définie sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est solution sur I de l'équation différentielle d'ordre un :*

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t), \text{ pour tout } t \in I \tag{1}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, si $x(t)$ est dérivable sur I et vérifie avec sa dérivée $\dot{x}(t)$ l'équation (1).

Théorème 1 (Existence)**.** *Quels que soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une solution $x(t)$ sur I telle que $x(t_0) = x_0$ vérifiant :*

$$x(t) = e^{\nu(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\nu(s)} b(s) \mathrm{d}s \right) \tag{2}$$

avec $\nu(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s$ pour tout t dans I.

Théorème 2. *La solution (2) est unique.*

En multipliant l'équation (1) par $e^{-\nu(t)}$ on obtient :

$$e^{-\nu(t)}\left(\dot{x}(t)-a(t)x(t)\right)=e^{-\nu(t)}b(t)$$

En notant que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-\nu(t)}x(t)=-\dot{\nu}(t)e^{-\nu(t)}x(t)+e^{-\nu(t)}\dot{x}(t)=e^{-\nu(t)}\left(\dot{x}(t)-a(t)x(t)\right)$$

il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-\nu(t)}x(t)=e^{-\nu(t)}b(t)$$

En intégrant la dérivée de $e^{-\nu(s)}x(s)$ entre t_0 et t, il vient :

$$x(t)e^{-\nu(t)}-x_0=\int_{t_0}^{t}e^{-\nu(s)}b(s)\mathrm{d}s$$

$$\Leftrightarrow x(t)=e^{\nu(t)}\left(x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-\nu(s)}b(s)\mathrm{d}s\right)$$

On considère généralement le cas (il s'agit juste d'une normalisation) où $I = \mathbb{R}_+$ et $t_0 = 0$

- Si $b(t) = 0$ pour tout t dans $[0, \infty[$ alors la solution (1) devient :

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}$$

- Si $a(t) = a$ pour tout t dans $[0, \infty]$, alors la solution (1) devient :

$$x(t) = x_0 e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-as} b(s)\mathrm{d}s$$

- Si $a(t) = a \neq 0$ et $b(t) = b$ pour tout t dans $[0, \infty]$, alors la solution (1) devient :

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} - \frac{b}{a}$$

Proposition 1. *Si $\varphi(t)$ est une solution particulière de (1), alors la solution $x(t)$ telle que $x(0) = x_0$ est $x(t) = \varphi(t) + ce^{\nu(t)}$, où $\nu(t)$ est une primitive de $a(t)$ et la constante $c = e^{-\nu(0)}(x_0 - \varphi(0))$. On dit que $x(t) = \varphi(t) + ce^{\nu(t)}$ est la solution générale de (1).*

Exemple 1 (Équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients constants)**.** *Soit l'équation différentielle $\dot{x}(t) = ax(t) + b$ avec $a \neq 0$. Une solution particulière est l'état stationaire de cette dynamique, $\varphi(t) = -{}^{b}/_{a}$. La solution de cette équation différentielle est donc :*

$$x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at}$$

- Une fonction $f(t)$ d'une variable réelle t à valeurs dans $\mathbb{C}$, s'écrit sous la forme $f(t) = f_1(t) + \mathrm{i} f_2(t)$, où f_1 et f_2 sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les propriétés de f découlent directement des propriétés de f_1 et f_2.
- La dérivée de f est définie si celles de f_1 et f_2 le sont, dans ce cas on a $f'(t) = f_1'(t) + \mathrm{i} f_2'(t)$.
- La dérivée d'une somme de fonctions à valeurs complexes est la somme des dérivées.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f(t) = e^{\lambda t}$ est dérivable et $f'(t) = \lambda e^{\lambda t}$.
- Si f_1 et f_2 sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ intégrables, alors $f(t) = f_1(t) + \mathrm{i} f_2(t)$ est intégrable, on a :

$$\int_0^t f(s)\mathrm{d}s = \int_0^t f_1(s)\mathrm{d}s + \mathrm{i} \int_0^t f_2(s)\mathrm{d}s$$

- Si f est dérivable en t

Fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (2)

- Si f est continue en t (continuité de f_1 et f_2), l'intégrale $\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ est dérivable en t, et sa dérivée est $f(t)$.
- Si les fonctions f et g à valeurs complexes sont dérivables en t, leur produit fg est dérivable en t, de dérivée égale à
  $f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.

L'équation différentielle

$$\dot{z}(t) = \lambda z(t) + f(t), t \in \mathbb{R}_+ \tag{3}$$

où λ est un nombre complexe et f est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ continue. Une fonction $z(t)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est solution de (3) si elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et si elle vérifie avec sa dérivée, $\dot{z}$, l'équation (3).

Théorème 3. *Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, l'équation différentielle (3) admet une solution $z(t)$ et une seule telle que $z(0) = z_0$. Cette solution est :*

$$z(t) = e^{\lambda t}\left(z_0 + \int_0^t e^{-\lambda s} f(s)\mathrm{d}s\right) \tag{4}$$

pour tout t dans $\mathbb{R}_+$.

Remarque 1. *Ce théorème généralise les théorèmes 1 et 2 au cas complexe. Notons néanmoins que : le terme devant le niveau de z dans (3) ne dépend pas de t, le support I est ici l'ensemble des réels positifs ou nul et l'instant initial est 0.*

Proposition 2. *Si $\psi(t)$ est une solution particulière de l'équation (3), les solutions $z(t)$ de (3) sont :*

$$z(t) = \psi(t) + \gamma e^{\lambda t} \tag{5}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$, où $\gamma = z(0) - \psi(0)$.

Proposition 3. *L'équation $\dot{z}(t) = \lambda z(t) + e^{\mu t} P_n(t)$ ($t \in \mathbb{R}_+$) où $P(t)$ est un polynôme à coefficients complexes d'ordre n et μ et λ sont des nombres complexes, admet une solution particulière de la forme $e^{\mu t} Q(t)$:*

- *Si $\mu \neq \lambda$, $Q(t)$ est un polynôme à coefficients complexes d'ordre n.*
- *Si $\mu = \lambda$, $Q(t)$ est un polynôme à coefficients complexes d'ordre $n+1$ sans terme constant.*

Définition 2. *La fonction réelle $z(t)$ à valeurs complexes définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+$ est solution sur cet interval de l'équation différentielle d'ordre deux sans second membre :*

$$\ddot{z}(t) = a\dot{z}(t) + bz(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \tag{6}$$

où a et b sont des paramètres dans $\mathbb{C}$, si $z(t)$ est deux fois dérivable sur I et vérifie avec ses deux premières dérivées $\dot{z}(t)$ $\ddot{z}(t)$ l'équation (6).

Propriété 1. *Soit λ un nombre complexe. Pour que $z(t)$ soit solution de (6), il faut et il suffit que $z(t)$ et $u(t) = \dot{z}(t) - \lambda z(t)$ soient solutions du système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) & = \lambda z(t) + u(t) \\ \dot{u}(t) & = (a - \lambda)u(t) + (-\lambda^2 + a\lambda + b)z(t) \end{cases} \tag{7}$$

- La propriété 1 nous dit qu'il est équivalent de résoudre l'équation (6) et de résoudre le système d'équation (7), pour toutes valeurs complexes du paramètre λ.
- Il ne nous reste plus qu'à choisir la valeur de λ qui nous arrange, c'est-à-dire qui rend la résolution du système (7) triviale.
- On remarque que si λ est tel que $\lambda^2 = a\lambda + b$ alors le système (7) est récursif (ou triangulaire). Dans ce cas on obtient directement la solution pour u :

$$u(t) = u(0)e^{(a-\lambda)t}$$

où λ est une solution complexe de :

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \tag{8}$$

l'équation caractéristique associée au problème (6).

– En substituant la solution pour u dans la première équation du système (7), on obtient une nouvelle équation différentielle pour caractériser la fonction z :

$$\dot{z}(t) = \lambda z(t) + u(0)e^{(a-\lambda)t}$$

il s'agit d'une ED linéaire que nous savons déjà résoudre.

Propriété 2. *Soient λ_1 et λ_2 les deux solutions de l'équation caractéristique (8). Quels que soient les conditions initiales complexes z_0 et z_1, il existe une solution $z(t)$ et une seule de (6) qui vérifie $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = z_1$. Cette solution est :*

$$z(t) = z_0 e^{\lambda_1 t} + \left(z_1 - \lambda_1 z_0\right) e^{\lambda_1 t} \int_0^t e^{(\lambda_2 - \lambda_2)s} s\mathrm{d}s \tag{9}$$

Propriété 3. *Les solutions complexes de l'équation (6) sont :*

- *Si* $\Delta = a^2 + 4b \neq 0$*,* $z(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$*, où* λ_1 *et* λ_2 *sont les racines (forcément distinctes dans ce cas) du polynôme caractéristique.*
- *Si* $\Delta = a^2 + 4b = 0$*,* $z(t) = \alpha e^{\frac{at}{2}} + \beta t e^{\frac{at}{2}}$*, où* $a/2$ *est la racine double du polynôme caractéristique.*

Les paramètres α *et* β *dans* $\mathbb{C}$ *sont déterminés à partir des conditions initiales (niveau et pente en zéro).*

$\Rightarrow$ L'ensemble des solutions décrites par (9) est un sous espace vectoriel de dimension deux de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Une base de ce sous espace est définie par les deux fonctions exponentielles $e^{\lambda_1 t}$ et $e^{\lambda_2 t}$ lorsque le discriminant est non nul, par les fonctions $e^{\frac{at}{2}}$ et $te^{\frac{at}{2}}$ lorsque le discriminant est nul.

Théorème 4. *Soient a et $b \neq 0$ deux nombres réels. Les solutions réelles de l'équation différentielle :*

$$\ddot{x}(t) = a\dot{x}(t) + bx(t)$$

sont :

- *Si $\Delta = a^2 + 4b > 0$, $x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$, où λ_1 et λ_2 sont les racines (forcément réelles et distinctes dans ce cas) du polynôme caractéristique.*
- *Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$, $z(t) = \alpha e^{\frac{at}{2}} + \beta t e^{\frac{at}{2}}$, où ${}^a/_2$ est la racine double du polynôme caractéristique.*
- *Si $\Delta = a^2 + 4b < 0$, $x(t) = e^{\frac{at}{2}}\left(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\right)$, où $\omega = \sqrt{-b - {}^{a^2}/_4}$*

α et β sont des nombres réels déterminés à partir des conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = x_1$. Pour tout $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe une seule solution $x(t)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 2. *Dans le cas où* $b = 0$*, l'équation différentielle se réduit à* $\ddot{x}(t) = a\dot{x}(t)$*. En faisant un changement de variable (par exemple en posant* $y(t) = \dot{x}(t)$*) on voit qu'il s'agit en fait d'une équation différentielle d'ordre un linéaire, dont la solution est :*

$$y(t) = y(0)e^{at}$$

D'où, si $a \neq 0$*, la solution pour* x *:*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\mathrm{d}s = x(0) + \dot{x}(0)\frac{e^{at} - 1}{a}$$

On envisage le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants mais avec un second membre non nul variable :

$$\ddot{x}(t) - a\dot{x}(t) - bx(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{10}$$

où a et $b \neq 0$ sont des réels, f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue.

Proposition 4. *Si $\varphi(t)$ est une solution particulière de (10), alors $x(t)$ est une solution de (10) si et seulement si $y(t) = x(t) - \varphi(t)$ est une solution de l'équation sans second membre :*
$\ddot{x}(t) - a\dot{x}(t) - bx(t) = 0$

Cette proposition nous dit que nous pouvons résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre deux en deux étapes. Il suffit d'ajouter une solution particulière à l'équation sans second membre associée.

Proposition 5. *Si* $f(t) = P(t)e^{rt}$ *où* $r \in \mathbb{R}$ *et* $P(t)$ *est un polynôme à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, il existe une solution particulière de (10) qui est de la forme :*

– *Si* r *n'est pas racine de l'équation caractéristique :* $Q(t)e^{rt}$*,*

– *si* r *est racine simple de l'équation caractéristique :* $tQ(t)e^{rt}$*, et*

– *si* r *est racine double de l'équation caractéristique :* $t^2Q(t)e^{rt}$

où $Q(t)$ *est un polynôme à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *de même degré que* $P(t)$*.*

- On s'intéresse ici au cas des ED dont les solutions sont des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit la dynamique :

$$\dot{x}(t) = ax(t) + P(t)e^{rt}$$

La solution est $x(t) = Q(t)e^{rt} + (x_0 - Q(0))e^{at}$. Le terme $Q(t)e^{rt}$ tend vers zéro lorsque $t \to \infty$ si et seulement si $r < 0$. Ainsi une CNS pour que $x(t)$ tende vers zéro lorsque $t \to \infty$ est que l'on ait $a < 0$ et $r < 0$.
- Soit la dynamique :

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b$$

La solution est $x(t) = (x_0 + {}^b/_a)e^{at} - {}^b/_a$. Une CNS pour que $x(t)$ tende vers zéro l'état stationnaire $-{}^b/_a$lorsque $t \to \infty$ est que l'on ait $a < 0$. On dit alors que l'équilibre $-{}^b/_a$ est globalement stable.

– Soit la dynamique :

$$\ddot{x}(t) - a\dot{x}(t) - bx(t) = P(t)e^{rt}$$

La forme de la solution (voir les propositions 5 et 4 et le théorème 4) dépend du signe du discriminant du polynôme caractéristique $(a^2 + 4b)$. Une CNS pour que la solution tende vers zéro lorsque t tend vers l'infini est que les parties réelles des racines du polynôme caractéristique sont négatives et que $r < 0$.

Théorème 5. *Les deux racines du polynôme* $x^2 - ax - b$ *ont leur partie réelle négative si et seulement si on a* $a < 0$ *et* $b < 0$.