Chapitre 2

Équations différentielles du 1er ordre

Par définition, une équation différentielle du premier ordre est une équation fonctionnelle où n'apparaît que la fonction inconnue et sa dérivée première. Dans ce chapitre nous commençons par traiter des problèmes linéaires, pour lesquels un traitement analytique est possible. Nous abordons ensuite les équations différentielles non linéaires. Dans ce dernier cas, on ne peut pas toujours exhiber une solution analytique. Il faut alors recourir à l'astuce (par exemple un changement de variable peut rendre le problème linéaire), à l'approximation (par exemple en linéarisant le problème à l'aide d'un développement de Taylor), à l'analyse graphique (pour déduire des propriétés de la solution sans calculer celle-ci explicitement) ou encore à l'ordinateur.

2.1 Équations différentielles linéaires avec coefficients constants

Dans cette section, nous considérons une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ay(t) = b \tag{2.1.1}$$

où a et b sont des paramètres réels. Nous distinguons deux cas selon que b est nul ou différent de zéro.

2.1.1 Le cas homogène

Nous commençons en abordant le cas le plus simple où la constante b est nulle. Notre problème peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ay(t) = 0 \tag{2.1.2}$$

où a est une constante réelle. On dit qu'une équation différentielle est homogène si et seulement si la dynamique n'est pas affectée lorsque l'on multiplie $y'(t)$ et $y(t)$ sont multipliés par une constante. On peut écrire (2.1.2) de façon équivalente :

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -a \tag{2.1.3}$$

La dynamique définie par (2.1.2) ou (2.1.3) correspond donc à une hypothèse de croissance à taux constant. Pour résoudre cette équation différentielle, c'est-à-dire exhiber une expression pour y en fonction du paramètre a et de t, il suffit de savoir dériver la fonction logarithme. En effet, nous savons que :

$$\dot{\log} u = \frac{\dot{u}}{u}$$

Ainsi nous pouvons écrire (2.1.3) de la façon suivante :

$$\dot{\log} y(t) = -a \tag{2.1.4}$$

Cette équation nous dit que les variations du logarithme de y sont constantes. Pour obtenir $\log y(T)$ nous sommons les variations $\dot{\log} y(t)$ entre 0 et T. En intégrant les deux membres de l'équation (2.1.4) entre 0 et T il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \dot{\log} y(t)\mathrm{d}t &= -\int_0^T a\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow [\log y(t)]_0^T &= -aT \\
\Leftrightarrow \log y(T) - \log y(0) &= -aT \\
\Leftrightarrow \log \frac{y(T)}{y(0)} &= -aT \\
\Leftrightarrow \frac{y(T)}{y(0)} &= e^{-aT}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est obtenue en appliquant la fonction réciproque du logarithme népérien : la fonction exponentielle. Cette transformation permet de revenir à la variable qui nous intéresse ($y(t)$ et non $\log y(t)$). Finalement nous avons :

$$y(t) = y(0)e^{-at} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.1.5}$$

Il s'agit de la solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène à coefficient constant (2.1.2). La solution dépend de la condition initiale, de la variable t et du paramètre a.

Remarque 2.1.1. *Si la condition initiale est nulle, alors $y(t) = 0$ pour tout t dans $\mathbb{R}^+$. On dit que zéro est l'*état stationnaire*, ou le point fixe, de cette dynamique.*

Remarque 2.1.2. *Les propriétés de la dynamiques sont liées au signe du paramètre a. Si $a > 0$ alors $\forall y(0)$ $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, la dynamique est stable, à long terme la variable y rejoint l'état stationnaire. Le niveau de long terme ne dépend pas de la condition initiale. À l'inverse, si $a < 0$ alors $\forall y(0) \neq 0$ on a $\lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty$, la variable diverge. La variable y se dirige vers $-\infty$ ou $+\infty$ selon le signe de la condition initiale. La figure [] illustre ces différents cas.*

2.1.2 Le cas non homogène

On s'intéresse maintenant au cas où $b \neq 0$, c'est-à-dire à un problème de la forme suivante :

$$\dot{y}(t) + ay(t) = b \tag{2.1.6}$$

La résolution de cette équation différentielle est obtenue en trois étapes.

[ÉTAPE 1] La solution générale de l'équation homogène associée.

L'équation sans second membre associée est :

$$\dot{y}(t) = -ay(t)$$

Nous avons déjà rencontré cette équation dans la section 2.1.1. Nous allons chercher la solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM) en suivant une démarche légèrement différente. En supposant que $y \neq 0$, nous avons de façon équivalente :

$$\dot{\overline{\log y}}(t) = -a$$

La dérivée par rapport t du logarithme népérien de $y(t)$ est égale à $-a$ pour tout t. Cela implique que la primitive (par rapport à t) du membre de droite est égale à la primitive (toujours par rapport à t) du membre de gauche. En intégrant les deux membres de cette équation, il vient :

$$\log y(t) + \gamma_1 = -at + \gamma_2$$

ou encore :

$$\log y(t) = -at + \gamma$$

puisque nous ne pourrons pas identifier (nous comprendrons plus loin) séparément les deux constantes γ_1 et γ_2. En appliquant la fonction réciproque du logarithme népérien, on obtient finalement :

$$y_1(t) = \Gamma e^{-at} \tag{2.1.7}$$

où $\Gamma = e^{\gamma}$. Cette équation définit un continuum de fonctions indexées par la constante Γ ; chaque fonction est solution de l'équation sans second membre associée à (2.1.6). C'est en ce sens qu'il s'agit d'une solution *générale*. À ce stade, la constante Γ n'est pas déterminée.

[ÉTAPE 2] Une solution particulière de l'équation complète.

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète (2.1.6). Nous choisissons la plus simple possible, c'est-à-dire la solution constante, de la forme :

$$y_2(t) = \frac{b}{a} \quad \forall t \tag{2.1.8}$$

Il s'agit de l'état stationnaire associé à l'équation différentielle complète ; si $y(t) = {}^{b}\!/_{a}$ alors $y(t+\epsilon) = {}^{b}\!/_{a}$ pour tout $\epsilon > 0$. Notons en passant que nous avons implicitement supposé que le paramètre a est non nul. Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, $y(t)$ constant n'est pas une solution particulière et il faut en chercher une autre (voir plus loin).

[ÉTAPE 3] La solution générale de l'équation complète.

En sommant la solution générale de l'équation sans second membre (2.1.7) et une solution particulière de l'équation complète (2.1.8), nous obtenons la solution générale de l'équation complète :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

soit dans le cas qui nous intéresse :

$$y(t) = \Gamma e^{-at} + \frac{b}{a} \tag{2.1.9}$$

Cette solution est générale dans le sens où le paramètre Γ n'est pas déterminé à ce stade. La solution générale détermine la forme de la fonction solution de (2.1.6), mais ne détermine pas son niveau qui est défini par la valeur du paramètre Γ. Choisir une valeur pour ce paramètre revient à choisir une trajectoire parmi une infinité de trajectoires envisageables.

[ÉTAPE 4] Solution de l'équation complète.

Choisir une valeur de Γ est aisé si nous connaissons la valeur de y à un instant t quelconque. Par exemple, nous pouvons connaître la condition initiale $y(0) = y_0$ (on parle aussi de condition au bord). À l'instant 0 nous avons :

$$y(0) = \Gamma + \frac{b}{a}$$

soit de façon équivalente :

$$\Gamma = y_0 - \frac{b}{a}$$

Ainsi la solution de l'équation différentielle non homogène (2.1.6) est donnée par :

$$y(t) = \left[y_0 - \frac{b}{a}\right] e^{-at} + \frac{b}{a} \tag{2.1.10}$$

Remarque 2.1.3. *La solution (2.1.10) n'est valable que si $a \neq 0$. Si cette condition n'est pas satisfaite, on obtient la solution beaucoup plus simplement. En effet, nous aurions alors :*

$$\dot{y}(t) = b$$

En intégrant, par rapport à t, les deux membres de cette équation on obtient directement :

$$y(t) = \gamma + bt$$

où γ est une constante arbitraire, que l'on peut aisément choisir à l'aide d'une condition initiale (par exemple).

Exercice 2.1.1. *Montrez, même dans le cas où $a = 0$, qu'il est toujours possible de résoudre l'équation différentielle non homogène (2.1.6) en suivant l'approche en quatre étapes décrite plus haut.* ***Indice :*** *Cherchez une solution non constante de l'équation complète.*

Remarque 2.1.4. *La démarche en quatre étapes n'est pas conseillée dans le cas où $a = 0$ (comme dans l'exercice 2.1.1). L'approche directe décrite dans la remarque 2.1.3 est bien plus simple.*

Remarque 2.1.5. *La solution (2.1.10) reçoit la même interprétation que dans la section 2.1.1. La dynamique est stable si et seulement si le paramètre a est positif. Dans ce cas, pour toute condition initiale $y(0)$, on a $\lim_{t\to\infty} y(y) = {}^{b}/_{a}$. Si le paramètre a est négatif, alors la variable $y(t)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $y(0) - {}^{b}/_{a}$, dès lors que $y(0) \neq {}^{b}/_{a}$. Si la condition initiale est égale à l'état stationnaire, alors $y(t) = {}^{b}/_{a}$ pour tout t indépendamment du signe de a. Il est possible d'écrire la solution (2.1.10) sous la forme suivante :*

$$y(t) = e^{-at}y_0 + \left(1 - e^{-at}\right)\frac{b}{a} \tag{2.1.11}$$

Le niveau de y à l'instant t est une combinaison convexe de l'état stationnaire et de la condition initiale. Si $a > 0$, l'influence de la condition initiale tend à disparaître alors que la pondération devant l'état stationnaire (la cible) tend vers 1.

2.1.3 Dynamique d'un prix de marché

Supposons que les fonctions de demande et d'offre d'un bien soient données par :

$$\begin{cases} Q_d &= \alpha - \beta P, \quad (\alpha, \beta > 0) \\ Q_s &= \gamma + \delta P, \quad (\gamma, \delta > 0) \end{cases} \tag{2.1.12}$$

où P est le prix du bien. Les paramètres β et δ affectent la sensibilité de la demande et de l'offre à une variation du prix (il ne s'agit pas d'élasticités). En égalisant les quantités offerte et demandée, on obtient le prix qui apure le marché :

$$P^\star = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta} > 0$$

a priori, le prix effectif, P,est différent de $P^\star$. Nous allons montrer que si le prix augmente lorsque la demande est supérieure à l'offre et diminue lorsque l'offre est supérieure à la demande, alors la dynamique de prix est telle que le prix effectif converge vers le prix qui apure le marché, $P^\star$. Nous formalisons cette hypothèse en supposant que :

$$\dot{P}(t) = j\left(Q_d(t) - Q_s(t)\right) \tag{2.1.13}$$

avec $j > 0$. Le prix est invariant si et seulement si l'offre égalise la demande. En substituant (2.1.12) dans (2.1.13), on obtient l'équation différentielle suivante pour le prix du bien :

$$\dot{P}(t) + j(\beta + \delta)P(t) = j(\alpha - \gamma) \tag{2.1.14}$$

En appliquant la formule (2.1.10) on obtient directement :

$$P(t) = \left[P(0) - P^\star\right]e^{-\kappa t} + P^\star \tag{2.1.15}$$

avec $\kappa \equiv j(\beta + \delta)$, le prix à l'instant t. Puisque $\kappa > 0$, le prix converge à long terme vers $P^\star$. La convergence vers le prix qui apure le marché est monotone croissante (si $P(0)$ est inférieur à $P^\star$, c'est-à-dire si initialement il y a excès de demande) ou décroissante (si $P(0)$ est supérieur à $P^\star$, c'est-à-dire si initialement il y a excès d'offre).

$P^\star$ est une solution particulière de l'équation (2.1.14), elle représente le niveau d'équilibre intertemporel de la variable d'intérêt. Le terme $[P(0) - P^\star]\, e^{-\kappa t}$ rend compte des déviations au niveau d'équilibre intertemporel.

Exercice 2.1.2. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

(i) $\dot{y}(t) + 4y(t) = 12$ *avec* $y(0) = 2$.

(ii) $\dot{y}(t) - 2y(t) = 0$ *avec* $y(0) = 9$.

(iii) $\dot{y}(t) + 10y(t) = 15$ *avec* $y(0) = 0$.

(iv) $2\dot{y}(t) + 4y(t) = 6$ *avec* $y(0) = 3/2$.

(v) $\dot{y}(t) + y(t) = 4$ *avec* $y(0) = 0$.

(vi) $\dot{y}(t) = 23$ *avec* $y(0) = 1$.

(vii) $3\dot{y}(t) + 6y(t) = 5$ *avec* $y(0) = 0$.

2.2 Équations différentielles linéaires avec coefficients variables

2.2.1 Le cas homogène

On s'intéresse à un problème de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y(t) = 0 \tag{2.2.1}$$

où $a(t)$ est une fonction réelle continue. Nous pouvons résoudre cette équation différentielle en suivant la même démarche que dans la section 2.1.1. Le taux de croissance de y à l'instant t est :

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -a(t) \tag{2.2.2}$$

ou encore en utilisant les propriétés de la fonction logarithme :

$$\dot{\log} y(t) = -a(t) \tag{2.2.3}$$

En intégrant les deux membres de la dernière équation entre 0 et T (on suppose que la condition initiale est connue), il vient :

$$\log y(T) - \log y(0) = -\int_0^T a(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.2.4}$$

soit de façon équivalente :

$$y(t) = y(0)e^{-\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{2.2.5}$$

On vérifie que si $a(t) = a$ pour tout t on trouve $\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau = at$ et donc une solution identique à celle obtenue dans la section 2.2.1. Les conditions de stabilité sont ici moins triviales, puisque tout dépend de la forme de la fonction $a(t)$. La dynamique de $y(t)$ est non divergente si et seulement si la limite de $\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau$ lorsque t tend vers l'infini est finie.

2.2.2 Équation différentielle exacte

Nous quittons un instant le monde des équations différentielles linéaires afin d'introduire un outil qui nous permettra de construire la solution d'une équation différentielle linéaire non homogène à coefficients variables.

Soit une fonction dans $\mathcal{C}_1$ de deux variables, $F(y,t)$, sa différentielle totale est :

$$\mathrm{d}F(y,t) = \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t$$

L'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t = 0$$

est une équation différentielle exacte, car le membre de gauche est *exactement* la différentielle de $F(y,t)$.

Exemple 2.2.1. *Soit $F(y,t) = y^2t + k$, où k est une constante. Nous avons :*

$$\mathrm{d}F = 2yt\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$2yt\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}t = 0$$

ou

$$\dot{y} + \frac{y^2}{2yt} = 0$$

est une équation différentielle exacte.

De façon générale, l'équation différentielle :

$$M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}t = 0 \tag{2.2.6}$$

est exacte si et seulement si il existe une fonction $F(y,t)$ telle que $M = \frac{\partial F}{\partial y}$ et $N = \frac{\partial F}{\partial t}$. Il nous manque un test pour savoir si une équation différentielle est exacte, c'est-à-dire pour savoir si il existe une fonction F à l'origine des fonctions M et N. Nous savons qu'une matrice hessienne est symétrique (théorème de Young), c'est-à-dire que $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}$. Ainsi l'équation différentielle est exacte si et seulement si :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} \tag{2.2.7}$$

Cette équation nous donne un test pour évaluer si une équation différentielle est exacte.

Exemple 2.2.2. *Si nous appliquons la condition (2.2.7) à l'exemple 2.2.1, où $M = 2yt$ et $N = y^2$, il vient :*

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 2y$$

et

$$\frac{\partial N}{\partial y} = 2y$$

Le test conclut qu'il s'agit bien d'une équation différentielle exacte.

Une équation différentielle exacte, par définition, nous dit que :

$$\mathrm{d}F(y,t) = 0$$

Ainsi, sa solution générale doit être de la forme :

$$F(y,t) = c$$

où c est une constante réelle. Résoudre une équation différentielle exacte c'est exhiber une primitive $F(y,t)$ et l'égaliser à une constante.

Méthode de résolution. Puisque $M = \frac{\partial F}{\partial y}$, la fonction F doit contenir une intégrale de M par rapport à la variable y. Nous devrions donc avoir :

$$F(y,t) = \int M\mathrm{d}y + \psi(t)$$

La dérivée partielle M est intégrée seulement par rapport à y, en traitant t comme une constante. Puisque en différentiant $F(y,t)$ partiellement par rapport à y, tout terme additif ne dépendant pas de y disparaît, on doit prendre soin de réintroduire ses termes dans le processus d'intégration. C'est exactement le rôle du terme $\psi(t)$. Il est relativement aisé d'évaluer $\int M\mathrm{d}y$, déterminer la fonction $\psi(t)$ est souvent moins évident.

Exemple 2.2.3. *On veut résoudre l'équation différentielle $\dot{y} + \frac{y}{2t} = 0$. En multipliant les deux membres de cette équation par $2yt\mathrm{d}t$, il vient :*

$$2yt\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}t = 0$$

Dans cet exemple nous avons $M = 2yt$ et $N = y^2$. Dans la suite nous résolvons cette équation différentielle en quatre étapes.

i Posons :

$$F(y,t) = \int 2yt\mathrm{d}y + \psi(t)$$

où $\psi(t)$ reste à déterminer. De façon équivalente, nous avons :

$$\begin{aligned} F(y,t) &= y^2t + k + \psi(t) \\ &= y^2t + \psi(t) \end{aligned}$$

où nous avons redéfini $\psi(t)$ afin d'inclure la constante d'intégration.

ii La dérivée partielle par rapport à t est :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = y^2 + \psi'(t)$$

En comparant avec $N = y^2$, on en déduit que la fonction $\psi(t)$ doit être telle que $\psi'(t) = 0$ pour tout t.

iii Nous savons donc que $\psi(t) = \kappa \in \mathbb{R}$ pour tout t.

iv Finalement, nous avons :

$$F(y,t) = y^2t + \kappa$$

La solution de l'équation différentielle exacte doit être de la forme :

$$y^2t + \kappa = c$$

où c est une constante réelle. Puisque les constantes κ et c ne sont pas individuellement identifiables, nous avons encore :

$$y^2t = \tilde{c}$$

d'où finalement :

$$y(t) = \bar{c}t^{-\frac{1}{2}}$$

où $\bar{c}$ est une constante qui pourra être déterminée, par exemple, à l'aide d'une condition initiale.

Exemple 2.2.4. *Soit l'équation différentielle :*

$$\dot{y} + \frac{y + 3t^2}{t + 2y} = 0$$

De façon équivalente, nous avons :

$$(t + 2y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + (y + 3t^2) = 0$$

ou encore :

$$(t + 2y)\mathrm{d}y + (y + 3t^2)\mathrm{d}t = 0$$

S'agit-il d'une équation différentielle exacte ? Nous avons :

$$M = t + 2y$$

et

$$N = y + 3t^2$$

Nous vérifions la condition $^{\partial M}/_{\partial t} = {}^{\partial N}/_{\partial y}$*, nous sommes donc bien en présence d'une équation différentielle exacte.*

Dans la suite nous résolvons cette équation différentielle en quatre étapes.

i *Posons :*

$$F(y,t) = \int (t+2y)\mathrm{d}y + \psi(t)$$

où $\psi(t)$ *reste à déterminer. De façon équivalente, nous avons :*

$$\begin{aligned} F(y,t) &= yt + y^2 + k + \psi(t) \\ &= y^2 t + \psi(t) \end{aligned}$$

où nous avons redéfini $\psi(t)$ *afin d'inclure la constante d'intégration.*

ii *La dérivée partielle par rapport à t est :*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = y + \psi'(t)$$

En comparant avec $N = y + 3t^2$*, on en déduit que la fonction* $\psi(t)$ *doit être telle que* $\psi'(t) = 3t^2$ *pour tout* t*.*

iii *Nous savons donc que* $\psi(t) = t^3 + \kappa$ *avec* $\kappa \in \mathbb{R}$ *(la primitive de la fonction* ψ' *obtenue plus haut).*

iv *Finalement, nous avons :*

$$F(y,t) = yt + y^2 + t^3 + \kappa$$

La solution de l'équation différentielle exacte doit être de la forme :

$$yt + y^2 + t^3 = c$$

où c *est une constante réelle. On vérifie qu'il s'agit bien de la solution en substituant dans l'équation de départ. Cette équation définit implicitement* y *comme une fonction de* t*.*

La procédure décrite dans ces deux exemples peut être appliquée à toute équation différentielle exacte. Dans certains cas (nous allons voir un exemple) la procédure peut être appliquée à une équation différentielle non exacte si on peut trouver une équation différentielle exacte équivalente.

Exemple 2.2.5. *Soit l'équation différentielle :*

$$2t\mathrm{d}y + y\mathrm{d}t$$

On vérifie facilement que cette équation différentielle n'est pas exacte. En effet nous avons : $^{\partial M}/_{\partial t} = 2$ *et* $^{\partial N}/_{\partial y} = 1$*. Néanmoins en multipliant chaque terme par* y*, on revient à l'exemple 2.2.3 et obtient donc une équation différentielle exacte.* y *est un facteur d'intégration dans cet exemple.*

2.2.3 Le cas non homogène

On s'intéresse à un problème de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y(t) = b(t) \tag{2.2.8}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions réelles continues. Ce problème peut s'écrire de façon équivalente sous la forme :

$$\mathrm{d}y + (a(t)y(t) - b(t))\mathrm{d}t = 0 \tag{2.2.9}$$

Nous avons $M = 1$ et $N = ay - b$, on voit immédiatement qu'il ne s'agit pas d'une équation différentielle exacte. Néanmoins il est possible d'exhiber un facteur d'intégration, que nous noterons $\mathcal{I}$ de façon à obtenir une équation différentielle exacte.

Le facteur d'intégration est tel que :

$$\mathcal{I}\mathrm{d}y + \mathcal{I}(a(t)y(t) - b(t))\mathrm{d}t = 0$$

et une équation différentielle exacte. Pour cela, il faut et il suffit que la condition (2.2.7) :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

avec $M = \mathcal{I}$ et $N = \mathcal{I}(ay - b)$, soit satisfaite. Le facteur d'intégration est donc tel que :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{I}a$$

soit de façon équivalente :

$$\frac{\dot{\mathcal{I}(t)}}{\mathcal{I}(t)} = a(t)$$

Le facteur d'intégration $\mathcal{I}$ soit être tel que son taux de croissance correspond à $a(t)$. Le facteur d'intégration $\mathcal{I}(t)$ est défini par une équation différentielle que nous savons résoudre :

$$\mathcal{I}(t) = Ae^{\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{2.2.10}$$

pour toute valeur réelle de A non nulle. Sans perte de généralité nous poserons $A = 1$. Finalement nous avons l'équation différentielle transformée suivante :

$$e^{\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}y + e^{\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau}(a(t)y(t) - b(t))\mathrm{d}t = 0 \tag{2.2.11}$$

qui par construction est exacte. Nous pouvons donc la résoudre en suivant les quatre étapes décrites plus haut.

i Posons :

$$F(y,t) = \int e^{\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}y + \psi(t)$$

où $\psi(t)$ reste à déterminer. De façon équivalente, nous avons :

$$F(y,t) = ye^{\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau} + \psi(t)$$

où nous avons redéfini $\psi(t)$ afin d'inclure la constante d'intégration.

ii La dérivée partielle par rapport à t de la fonction $F(y,t)$ est :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = y(t)a(t)e^{\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau} + \psi'(t)$$

En comparant avec N nous obtenons une restriction sur la fonction $\psi(t)$:

$$\psi'(t) = -b(t)e^{\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

iii La fonction $\psi(t)$ est donc définie par (nous supposons que l'instant initial est en zéro) :

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_0^t \psi'(s)\mathrm{d}s \\ &= -\int_0^t b(s)e^{\int_0^s a(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

nous ne pouvons aller plus loin ici car les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ ne sont pas spécifiées.

iv Finalement, en substituant l'expression de $\psi(t)$ dans la fonction $F(y,t)$ postulée, nous obtenons :

$$y(t)e^{\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau} - \int_0^t b(s)e^{\int_0^s a(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s = c$$

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients variables est :

$$y(t) = e^{-\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(c + \int_0^t b(s)e^{\int_0^s a(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\right) \tag{2.2.12}$$

où c peut être déterminé à partir de la condition initiale. On vérifie que si la condition initiale $y(0) = y_0$ est connu alors $c = y_0$.

Exemple 2.2.6. *Soit l'équation différentielle :*

$$\dot{y}(t) + 2ty(t) = t$$

On suppose que la condition initiale $y(0)$ est connue. Nous avons $a(t) = 2t$ et $b(t) = t$. En appliquant le résultat (2.2.12), il vient :

$$y(t) = e^{-t^2}\left(y(0) + \int_0^t se^{s^2}\mathrm{d}s\right)$$

car $\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau = 2\int_0^t \tau\mathrm{d}\tau = t^2$. En notant que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}e^{s^2} = 2se^{s^2}$, il vient :

$$y(t) = e^{-t^2}\left(y(0) - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

Notons que $1/2$ est une solution particulière constante de l'équation différentielle, il s'agit d'un état stationnaire (stable dans cet exemple puisque le terme exponentiel tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini).

Exercice 2.2.1. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

(a) $\dot{y} + 5y = 15$

(b) $\dot{y} + 2ty = 0$

(c) $\dot{y} + 2ty = t$ *avec* $y(0) = 3/2$

(d) $\dot{y} + t^2 y = 5t^2$ *avec* $y(0) = 6$

(e) $2\dot{y} + 12y + 2e^t = 0$ *avec* $y(0) = 6/7$

(f) $\dot{y} + y = t$

2.3 Équations différentielles non linéaires

Dans cette section nous nous intéressons aux équations différentielles qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$f(y,t)\mathrm{d}y + g(y,t)\mathrm{d}t = 0 \tag{2.3.1}$$

ou :

$$\dot{y}(t) = h(y(t), t) \tag{2.3.2}$$

avec $h(y,t) = -g(y,t)/f(y,t)$. Dans ce problème on peut éventuellement reconnaître une équation différentielle exacte, si la condition :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

est vérifiée. Nous savons déjà comment résoudre ce type d'équation différentielle (voir la section 2.2.2).

2.3.1 Problème séparable

Nous envisageons ici le cas où f ne dépend pas de t et g ne dépend pas de y. Cette classe de problème est très simple à résoudre.

Exemple 2.3.1. *Soit l'équation différentielle :*

$$3y^2\mathrm{d}y = t\mathrm{d}t$$

En intégrant les deux membres de cette égalité on obtient directement :

$$\int 3y^2\mathrm{d}y = \int t\mathrm{d}t$$

soit

$$y^3 + \gamma_1 = \frac{1}{2}t^2 + \gamma_2$$

ou encore

$$y^3 = \frac{1}{2}t^2 + \gamma$$

puisque les deux constantes d'intégrations ne sont pas identifiables séparément. Nous avons donc :

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + \gamma\right)^{\frac{1}{3}}$$

On peut alors fixer $gamma$ à l'aide de la condition initiale en évaluant la dernière équation en 0. Il vient :

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + y(0)^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

Exemple 2.3.2. *Soit l'équation différentielle :*

$$2t\mathrm{d}y + y\mathrm{d}t = 0$$

A priori, cette équation différentielle n'appartient pas à la classe discutée ici (puisque $\mathrm{d}y$ est associé à une fonction de t et non de y). Mais en divisant les deux membres par $2yt$, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}t}{2t} = 0$$

Nous au passage que cette transformation rend l'équation différentielle exacte (en plus de devenir séparable). On peut alors suivre le même raisonnement que dans l'exemple précédant. En intégrant la dernière équation, il vient :

$$\log y + \frac{1}{2}\log t = \gamma$$

soit de façon équivalente :

$$yt^{\frac{1}{2}} = e^{\gamma}$$

et finalement :

$$y(t) = \Gamma t^{-\frac{1}{2}}$$

Notons que cette solution n'est pas définie en zéro (nous le savons déjà depuis la transformation du problème initial qui suppose implicitement $y \neq 0$ et $t \neq 0$), pour fixer la constante Γ il faut donc choisir un instant initial strictement positif.

2.3.2 Problème réductible à une dynamique linéaire

L'équation différentielle de la forme :

$$\dot{y}(t) + R(t)y(t) = Q(t)y(t)^m \tag{2.3.3}$$

avec $m \neq \{1, 0\}$, est une équation de Bernoulli. Cette équation peut toujours se réduire à une équation différentielle linéaire par changement de variable.

Divisons les deux membres par y^m :

$$y(t)^{-m}\dot{y}(t) + R(t)y(t)^{1-m} = Q(t)$$

et posons $z = y^{1-m}$ l'équation (2.3.3) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{1-m}\dot{z}(t) + R(t)z(t) = Q(t)$$

ou encore :

$$\dot{z}(t) + (1-m)\left[R(t)z(t) - Q(t)\right] = 0 \tag{2.3.4}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients variables. Nous pouvons donc résoudre (2.3.4) puis exprimer z en fonction de y afin d'obtenir la solutions de (2.3.3).

Exemple 2.3.3. *Soit l'équation différentielle :*

$$\dot{y}(t) + ty(t) = 3ty(t)^2$$

En divisant par y^2, il vient :

$$\dot{y}y^{-2} + ty^{-1} - 3t = 0$$

posons $z = y^{-1}$ (nous avons donc $\dot{z} = -y^{-2}\dot{y}$), nous pouvons alors écrire la dynamique de la variable z :

$$-\dot{z} + tz - 3t = 0$$

ou de façon équivalente :

$$\dot{z} - tz + 3t = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients variables. En appliquant les résultats obtenus dans la section 2.2.3, il vient directement :

$$z(t) = e^{\int_0^t \tau \mathrm{d}\tau}\left(A - 3\int_0^t s e^{-\int_0^s \tau \mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\right)$$

soit :

$$z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(A - 3\int_0^t s e^{-\frac{s^2}{2}}\mathrm{d}s\right)$$

ou encore :

$$z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(A-3\right) + 3$$

Il nous reste à renverser la transformation, puisque la variable d'intérêt est y et non z. Nous avons $y = z^{-1}$, ainsi il vient directement :

$$y(t) = \frac{1}{e^{\frac{t^2}{2}}\left(A-3\right) + 3}$$

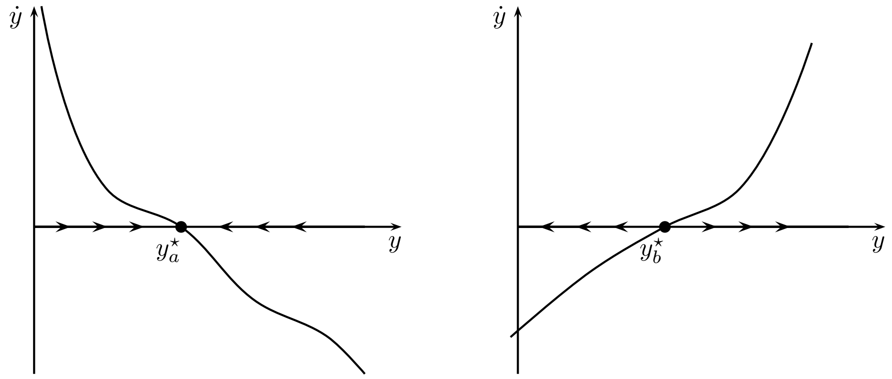
En utilisant la condition initiale (en $t = 0$ ici), on peut déterminer la constante A :

$$y(t) = \frac{1}{e^{\frac{t^2}{2}}\left(\frac{1}{y(0)} - 3\right) + 3}$$

Exercice 2.3.1. *Cherchez la solution de l'équation différentielle suivante :*

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{t}y(t) = y(t)^3$$

avec $t_0 > 0$ l'instant initial et on suppose que la condition initiale $y(t_0)$ est connue.



(a) État stationnaire stable (b) État stationnaire instable

FIG. 2.1: **Diagramme des phases.** Dynamiques stables et instables.

2.3.3 Approche qualitative

On ne peut pas toujours résoudre analytiquement une équation différentielle non linéaire. Dans de nombreux cas nous devons nous contenter de solutions numériques (pour une approche quantitative, voir la section suivante) ou graphique (si une approche qualitative peut suffire). À l'aide d'une approche graphique, on peut par exemple s'interroger sur la stabilité de la dynamique.

On s'intéresse ici à une dynamique de la forme :

$$\dot{y} = f(y)$$

où f est une fonction continue ne dépendant pas du temps. On parle alors d'une équation différentielle autonome.

On peut alors représenter graphiquement la dynamique dans le plan $(y, \dot{y})$. La figure 2.1 donne deux exemples. Dans le graphique 2.1(a) la fonction f est monotone décroissante, alors que dans le graphique 2.1(b) la fonction f est monotone croissante. La lecture de ces graphiques repose sur les trois observations suivantes :

1. Lorsque $f(y) > 0$, la variation $\dot{y}$ est positive et donc y augmente.
2. Lorsque $f(y) < 0$, la variation $\dot{y}$ est négative et donc y diminue.
3. Lorsque $f(y) = 0$, la variation $\dot{y}$ est nulle et donc y ne bouge pas

Ces trois observations expliquent comment nous avons orienté les flèches sur l'axe des abscisses. Ces flèches décrivent le sens de variation de la variable y. Par exemple, dans le graphique 2.1(a), $f(y)$ est négatif lorsque $y < y_a^\star$ et positif lorsque $y > y_a^\star$. Ainsi, y augmente lorsque le niveau de y est faible (relativement à $y_a^\star$) et donc les flèches sont dirigées vers la droite, y diminue lorsque le niveau de y est important et donc les flèches sont

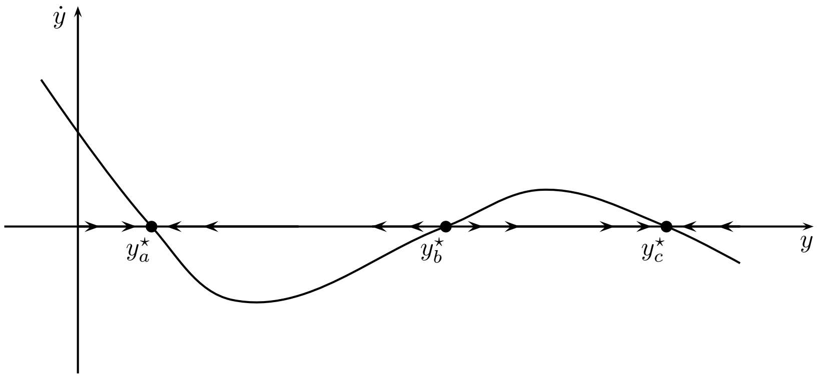


FIG. 2.2: **Diagramme des phases.** Multiplicité des états stationnaires.

dirigées vers la gauche.

$y_a^\star$ et $y_b^\star$ sont les états stationnaires (point fixe de la dynamique). Un seul regard sur ces graphiques nous renseigne sur les propriétés de ces états stationnaires. $y_a^\star$ est stable (si pour une raison quelconque on s'éloigne de $y_a^\star$ on y revient), contrairement à $y_b^\star$ qui est instable (si on s'écarte de $y_b^\star$ on y revient jamais).

Ces graphiques suggèrent que si f est monotone décroissante alors la dynamique est stable et que si f est monotone croissante alors la dynamique est instable. En fait nous devrions distinguer la stabilité globale et la stabilité locale. La figure 2.2 montre que la fonction f peut être beaucoup plus «tordue». Dans ce cas $y_a^\star$ et $y_c^\star$ sont des états stationnaires localement stables et $y_b^\star$ est un état stationnaire instable. $y_a^\star$ est *localement* instable dans le sens où si on s'écarte modérément de $y_a^\star$ on revient à cet état stationnaire, mais si on s'écarte trop important (si on va plus loin que $y_b^\star$) on ne revient jamais vers $y_a^\star$.

On retient deux idées de ces exemples :

1. L'état stationnaire, s'il existe, n'est pas toujours unique. On peut aussi imaginer des cas où il n'existe pas.
2. La stabilité locale ou globale ne peu apparaître que si la fonction f, dite de transition, est, au moins localement, décroissante.

Rétrospectivement, le point 2 est cohérent avec ce que nous avons vu dans le cas linéaire. Soit l'équation différentielle linéaire :

$$\dot{y} = b - ay$$

Les propriétés en termes de stabilité dépendent du signe du paramètre a : la dynamique est stable si et seulement si a est positif. On retient que la dynamique est stable s'il y a une *relation décroissante entre la variation et le niveau*. Dans ce cas, à long terme, pour toute condition initiale, $y(t)$ converge vers $^b/_a$. À un instant t

quelconque, on a :

$$y(t) = \left[y(0) - \frac{b}{a}\right] e^{-at} + \frac{b}{a}$$

2.3.4 Approche numérique

L'approche décrite dans la section précédente peut ne pas suffire si on désire obtenir des informations plus précises sur la solution de l'équation différentielle non linéaire. Dans ce cas on utilise le calcul numérique à l'aide d'un PC. Cette tâche est relativement simple avec un logiciel comme Matlab (vous pourrez préférer une version libre comme Octave qui propose le même genre de possibilités). Matlab dispose d'une collection de fonctions (`ode45`, `ode23`, `ode113`, *etc.*) pour résoudre des problèmes de la forme :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

où la condition initiale $y(t_0)$ est donnée, sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$.

À titre d'exemple nous allons résoudre, à l'aide de Matlab, l'équation différentielle non linéaire considérée dans l'exemple 2.3.3 ; comme nous disposons d'une solution analytique nous pourrons évaluer la précision de la solution numérique. Pour rappel, la solution analytique est :

$$y(t) = \frac{1}{e^{\frac{t^2}{2}}\left(\frac{1}{y(0)} - 3\right) + 3}$$

Avant de se lancer dans l'étude numérique de la dynamique il convient de discuter les propriétés de la solution analytique. On observe les points suivants :

1. $y^\star = \frac{1}{3}$ est un état stationnaire. Pour vérifier ce point on peut substituer $y(t) = \frac{1}{3}$ dans l'équation différentielle. Si $y(0) = \frac{1}{3}$ alors $y(t) = \frac{1}{3}$ pour tout t.
2. Si $y(0) < \frac{1}{3}$ alors $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0^+$. L'état stationnaire n'est donc pas stable.
3. Le cas $y(0) > \frac{1}{3}$ mérite un traitement particulier. En effet dans ce cas on observe :
   i) qu'il existe une asymptote verticale en
   $$t^\star = \sqrt{2\log\left(\frac{3}{3 - \frac{1}{y(0)}}\right)}$$
   ii) que pour tout $t < t^\star$ $y(t)$ est monotone croissante avec $\lim_{t\to t^\star} y(t) = +\infty$.
   iii) que pour tout $t > t^\star$, $y(t)$ est monotone croissante avec $\lim_{t\to t^\star} y(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0^-$

Les propriétés de la solution dépendent radicalement de la condition initiale. L'approche numérique du cas $y(0) < \frac{1}{3}$ ne pose pas de problème, contrairement au cas complémentaire (à cause de l'asymptote verticale).

```
function dy = bernoulli(t,y)
    dy = 3*t*y^2 - t*y ;
```

FIG. 2.3: **Définition de l'équation différentielle à résoudre.**

Nous commençons par écrire une fonction Matlab où nous définissons l'équation différentielle à résoudre. L'équation différentielle est :

$$\dot{y}(t) + ty(t) = 3ty(t)^2$$

ou de façon équivalente :

$$\dot{y}(t) = 3ty(t)^2 - ty(t)$$

Nous avons donc un problème de la forme :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

avec

$$f(t, y) = 3ty^2 - ty$$

Le code est présenté dans la figure 2.3. La première ligne définit l'*output*, `dy`, et les *inputs*, `t` et `y`, de la fonction `bernoulli`. Il ne nous reste plus qu'à écrire un script où nous demandons à Matlab de résoudre cette équation différentielle. Un tel script est exposé dans la figure 2.4. La ligne 2 définit la condition initiale relativement à l'état stationnaire. Entre les lignes 4 et 6 on calcul l'instant $t^\star$, le lieu de l'asymptote verticale, s'il existe (*ie* dans le cas $y(0) > \frac{1}{3}$). Entre les lignes 8 et 14 on détermine l'instant initial (`t0`) et l'instant terminal (`t1`); on cherchera une solution pour $y(t)$ avec $t \in [t_0, t_1]$. Notons que dans le cas où $y(0) > \frac{1}{3}$ (après `else`), l'instant terminal est inférieur à $t^\star$ car Matlab ne peut évaluer la solution dans le cas d'une asymptote verticale. À la ligne 16 on utilise la fonction `ode45` pour résoudre l'équation différentielle. Cette fonction renvoie deux arguments : `T` est un vecteur de points où y est évalué, `Y` est un vecteur de même taille que `T` donnant les valeurs de y. Le reste du script construit deux graphiques. Le premier donne une représentation de la solution. Le second rend compte de l'erreur commise par Matlab dans la résolution de l'équation différentielle (nous disposons d'une solution analytique).

La figure 2.5 représente les résultats obtenus pour $y_0 = 0,9y^\star$ et $y_0 = 1,1y^\star$. Dans le premier cas, l'erreur est au plus de $0,21 \times 10^{-3}$ en valeur absolue. Dans le second cas, l'erreur est au plus de $0,52 \times 10^{-3}$. Au total l'erreur est de l'ordre de 10^{-4}. On constate que les erreurs sont quasi nulles lorsque la trajectoire de y est plate et deviennent plus importantes lorsque la trajectoire est plus pentue. Notons qu'il est possible de réduire la taille des erreurs. Il faut pour cela dire à Matlab de rechercher une approximation plus précise de la solution (reportez vous à la documentation de Matlab/Octave et plus spécialement aux options de la

```
ystar = 1/3;
y0 = 0.9*ystar;

if y0>ystar
    tstar = sqrt(2*log(3/(3-1/y0)));
end

if y0<ystar
    t0 = 0;
    t1 = 10;
else
    t0 = 0;
    t1 = 0.9*tstar;
end

[T,Y] = ode45(@bernoulli,[t0 t1],y0);

figure(1)
plot(T,Y,'-k');

figure(2)
plot(T,1./(exp(.5*T.^2).*(1/y0-3)+3)-Y,'-k');
```

FIG. 2.4: **Instructions pour résoudre l'équation différentielle et évaluer la précision du calcul numérique.**

fonction `ode45`). Cette application nous apprend qu'il est toujours utile de s'interroger sur les propriétés de la solution avant de se lancer dans un calcul numérique (avec la solution analytique, mais si nous disposons de la solution analytique la solution numérique devient sans intérêt sauf à titre de vérification, ou avec l'approche qualitative). Une réflexion préalable est toujours une bonne idée. Dans le cas $y_0 > y^\star$, la routine `ode45`, ou d'autres routines, plante lamentablement si on essaye d'obtenir la solution pour $t \in [0, T]$ avec T trop proche de $t^\star$ (lorsque la trajectoire de y est très pentue) ou au delà de $t^\star$ *a fortiori*.

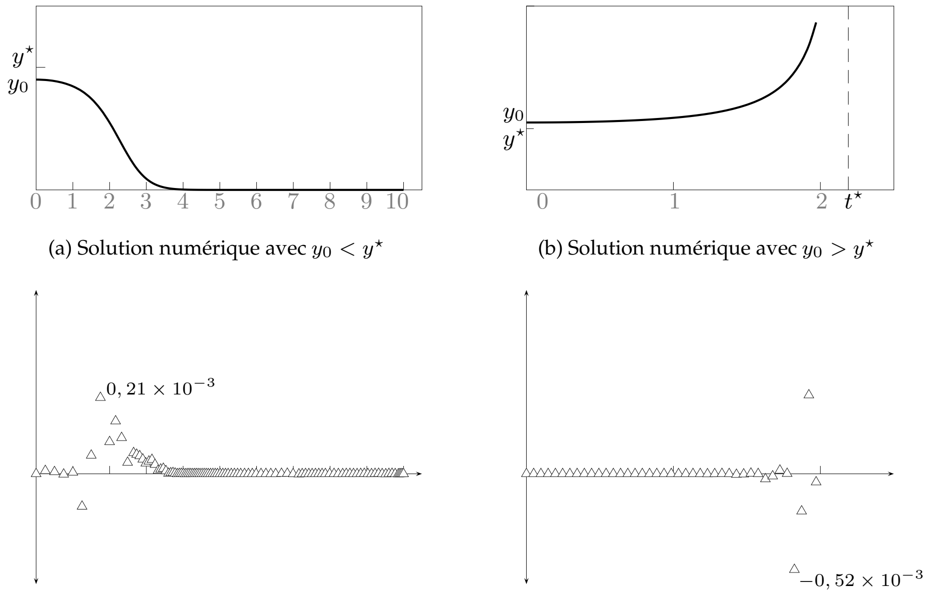
2.3.5 Approximation locale

Comme dans la section 2.3.3, on s'intéresse ici à une dynamique autonome de la forme :

$$\dot{y} = f(y)$$

où f est une fonction continue et dérivable ne dépendant pas du temps. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des approches globales. L'approche qualitative ou l'approche analytique sont globales car nous caractérisons la solution ou obtenons la solution pour toutes les valeurs possibles de t **et** indépendamment du niveau de y. L'approche numérique est elle aussi globale car elle est «valable» pour un (des) intervalle(s) de valeurs possibles de t indépendamment du niveau de y. Ici nous abordons une approche locale, dans le sens où ce que nous pourrons dire de y ne sera «pertinent» que dans un voisinage d'un niveau spécifique de la variable y.

Si la fonction f est continue et dérivable en $\bar{y}$ alors en considérant un développement de Taylor à l'ordre 1,



(a) Solution numérique avec $y_0 < y^\star$

(b) Solution numérique avec $y_0 > y^\star$

(c) Erreurs dans le cas où $y_0 < y^\star$

(d) Erreurs dans le cas où $y_0 > y^\star$

FIG. 2.5: **Solutions numériques.** Le graphique (c) représente les erreurs associées à la solution numérique, reportée dans le graphique (a), pour le cas où $y_0 = 0,9 \times y^\star = 0,3000$. Le graphique (d) représente les erreurs associées à la solution numérique, reportée dans le graphique (b), pour le cas où $y_0 = 1,1 \times y^\star = 0,3667$. Pour cette condition initiale, l'asymptote verticale est en $t^\star = 2,1899$.

nous avons :

$$\dot{y} = f(\bar{y}) + f'(\bar{y})(y - \bar{y}) + \mathcal{O}(|y - \bar{y}|^2)$$

Si nous omettons le terme résiduel (qui tend vers zéro lorsque y se rapproche $\bar{y}$) nous avons :

$$\dot{y} \approx f(\bar{y}) + f'(\bar{y})(y - \bar{y})$$

Dans un voisinage de $\bar{y}$, la dynamique est approximativement linéaire. La qualité de l'approximation dépend de la distance de y à $\bar{y}$. Nous savons résoudre cette équation différentielle, il s'agit d'une équation différentielle à coefficients constants. Mais il faut garder à l'esprit que la solution que nous obtiendrons en appliquant les résultats de la section 2.1 ne sera acceptable que pour des valeurs de y dans un voisinage de $\bar{y}$. C'est en ce sens que cette approche est locale.

A priori nous pouvons choisir n'importe quel point $\bar{y}$, pourvu que la fonction f soit dérivable en ce point. Habituellement on approxime le modèle autour d'un état stationnaire de la dynamique, $y^\star$. Cela permet d'éliminer la constante, puisque par définition $\dot{y}$ est nul à l'état stationnaire. Ainsi nous avons :

$$\dot{y} \approx f'(y^\star)(y - y^\star)$$

Une autre motivation est que si cet état stationnaire est stable, alors nous sommes sûr que si $y(0)$ est dans un voisinage de $y^\star$ alors $y(t)$ restera dans ce même voisinage, ce qui nous assure de la qualité de l'approximation.

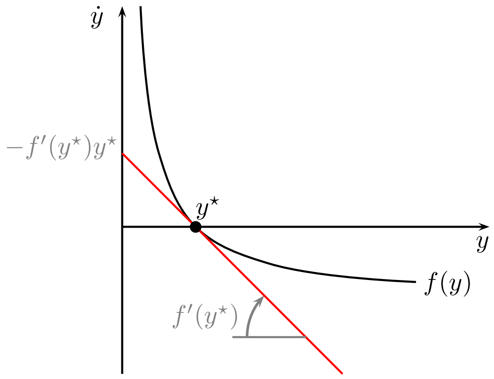


FIG. 2.6: **Interprétation graphique de la linéarisation.**

Notons que dans le cas d'états stationnaires multiples, il y a un degré de liberté sur le choix du point dans le voisinage duquel f est approximé. Les propriétés de la solution approximée peuvent être fort différentes, par exemple en termes de stabilité.

L'interprétation géométrique de cette approximation est directe. Faire une approximation à l'ordre 1 (on parle aussi de linéarisation) c'est remplacer la fonction f par la tangente de f en $y^\star$. La figure 2.6 illustre l'approximation à l'ordre un.

Pour finir notons qu'a priori rien ne nous empêche de considérer des ordres d'approximations supérieurs à un. Dans certains cas, il peut être nécessaire, afin de ne pas omettre des propriétés intéressantes de la variable étudiée, d'aller chercher une approximation à l'ordre deux ou trois.

2.3.6 Le modèle de Solow

Le modèle de Solow est un modèle dynamique en temps continu décrivant l'évolution du stock de capital physique ou de la production dans une économie fermée. Nous n'aborderons pas ici le modèle en détails, le but est simplement d'appliquer les méthodes présentées plus haut.

On se donne une fonction de production néoclassique[1] :

$$Y(t) = F\left(K(t), A(t)L(t)\right)$$

avec

$$L(t) = e^{nt}$$

[1]Reportez vous à votre cours de croissance pour les propriétés de cette fonction.

et

$$A(t) = e^{gt}$$

la population et l'indice d'efficience du travail (on suppose ici que le progrès technologique améliore l'efficacité du travail) à l'instant t. La loi d'évolution du stock de capital physique est :

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

avec $s \in]0,1[$ le taux d'épargne exogène et $\delta \in [0,1]$ le taux de dépréciation du capital. Cette équation nous dit simplement que le stock de capital augmente si et seulement si l'investissement en capital physique domine la dépréciation du capital physique. En substituant la fonction de production dans la dernière équation, on voit bien qu'il s'agit d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 :

$$\dot{K}(t) = sF\left(K(t), e^{(n+g)t}\right) - \delta K(t)$$

Cette équation différentielle est non autonome, *la relation entre la variation du stock de capital physique et son niveau dépend du temps*, via le terme $e^{(n+g)t}$ qui représente la croissance du travail efficace. La première chose à faire est de nous ramener à une équation différentielle autonome. Pour cela il suffit d'éliminer les tendances démographique et technologique. On pose $k(t) = K(t)/L(t)$, le stock de capital physique par tête, et $\hat{k}(t) = k(t)/A(t)$, le stock de capital physique par tête efficace. La variable $\hat{k}(t) = k(t)/A(t)$ est le stock de capital physique «purgé» de la croissance de la population et du progrès technologique. On peut espérer que l'équation différentielle caractérisant l'évolution de cette variable soit autonome. On vérifie facilement que la du capital par travailleur efficace est donnée par :

$$\dot{\hat{k}}(t) = sf\left(\hat{k}(t)\right) - (g+n+\delta)\hat{k}(t) \tag{2.3.5}$$

où $f\left(\hat{k}(t)\right) = F\left(\hat{k}(t), 1\right) = \hat{y}(t)$ est la production par tête efficace[2]. Il s'agit bien d'une équation différentielle autonome. Si la fonction de production est de type néoclassique alors on peut montrer qu'il existe un unique état stationnaire $\hat{k}^\star$ strictement positif. En passant, notons que $\hat{k} = 0$ est aussi un état stationnaire[3], dit trivial, que nous laisserons de côté pour des raisons évidentes. Pour se convaincre de ce résultat d'existence et d'unicité, il suffit de reprendre : (2.3.5) sous la forme :

$$\frac{\dot{\hat{k}}(t)}{\hat{k}(t)} = \frac{sf\left(\hat{k}(t)\right)}{\hat{k}(t)} - (g+n+\delta) \tag{2.3.6}$$

Le taux de croissance du stock de capital par tête efficace est strictement positif si et seulement si l'investissement brut par unité de capital est strictement supérieur au taux de dépréciation du capital physique par tête efficace. Autrement dit, le taux de croissance du capital par tête efficace est l'investissement net par unité de

[2]Pour que nous puissions définir la technologie intensive il faut que la fonction de production soit homogène de degré un (rendements constants dans le capital et le travail). Une fonction de production néoclassique vérifie cette propriété.

[3]Une fonction de production néoclassique vérifie $f(0) = 0$, la production est nulle si au moins un des facteurs de production est nul.

capital physique. Le premier terme du membre de droite, l'investissement brut par unité de capital, est égal à la productivité moyenne du capital multiplié par le taux d'épargne. Ce terme est strictement positif, monotone décroissant (parce que les rendements du capital physique sont décroissants) et on a aussi $\lim_{\hat{k}\to\infty} \frac{f(\hat{k}(t))}{\hat{k}(t)} = 0$ et $\lim_{\hat{k}\to 0} \frac{f(\hat{k}(t))}{\hat{k}(t)} = \infty$ par les conditions d'Inada. Ainsi la courbe représentative de l'investissement brut par unité de capital croise nécessairement une seule fois le taux de dépréciation du capital par tête efficace. L'état stationnaire est donc unique. Cet état stationnaire vérifie :

$$sf\left(\hat{k}^{\star}\right) = (g+n+\delta)\hat{k}^{\star}$$

À l'état stationnaire, nous avons donc :

$$\frac{\hat{y}^{\star}}{\hat{k}^{\star}} = \frac{g+n+\delta}{s} \tag{2.3.7}$$

Dans la suite nous chercherons à décrire la dynamique du produit par tête efficace et plus spécialement nous caractériserons la dynamique d'ajustement vers l'état stationnaire (lorsqu'il existe) en calculant la vitesse de convergence vers l'état stationnaire. En dérivant $\hat{y}(t)$ par rapport à t et en utilisant (2.3.5), on obtient :

$$\frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\hat{y}(t)} = sr\left(\hat{k}(t)\right) - (n+g+\delta)\alpha\left(\hat{k}(t)\right) \tag{2.3.8}$$

avec

$$r\left(\hat{k}(t)\right) = f'\left(\hat{k}(t)\right)$$

la productivité marginal du capital physique (qui dans un environnement parfaitement concurrentiel correspond au taux d'intérêt réel) et

$$\alpha\left(\hat{k}(t)\right) = \frac{f'\left(\hat{k}(t)\right)\hat{k}(t)}{\hat{y}(t)}$$

l'élasticité du produit par rapport au capital (ou encore, dans un environnement parfaitement concurrentiel, la part des revenus du capital physique dans le revenu total). La vitesse de convergence est quant à elle définie comme le rapport de la variation du taux de croissance et du niveau du taux de croissance. En comparant (2.3.7) et (2.3.8) on obtient la restriction suivante sur l'état stationnaire :

$$\frac{\hat{y}^{\star}}{\hat{k}^{\star}} = \frac{r(\hat{k}^{\star})}{\alpha(\hat{k}^{\star})} \equiv \frac{r^{\star}}{\alpha^{\star}} \tag{2.3.9}$$

Nous supposerons parfois que la technologie est de type CES (pour *Constant Elasticity of Substitution*). Cette fonction de production est plus générale que la fonction de production Cobb-Douglas, mais n'est pas une fonction de production néoclassique (les conditions d'Inada ne sont pas satisfaites). Dans ce cas l'exitence de l'état stationnaire $\hat{k}^{\star} > 0$ n'est plus assurée, et dépendra des valeurs des paramètres du modèle. On posera :

$$\hat{y}(t) = \left(\gamma_1 \hat{k}(t)^{\rho} + \gamma_2\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

avec $\rho \in]-\infty, 1]$, $\sigma = (1-\rho)^{-1}$ l'élasticité de substitution constante entre les facteurs et $\gamma_1+\gamma_2 = 1$. On retrouve la fonction de production Cobb Douglas, qui est de type néoclassique, lorsque $\sigma \rightarrow 1$. On peut facilement établir les conditions d'existence de l'état stationnaire $\hat{k}^{\star} > 0$:

1. Si $\rho \in]0, 1]$ (les facteurs sont plus substituables que dans le cas Cobb-Douglas), alors l'unique état stationnaire $\hat{k}^{\star} > 0$ existe si et seulement si $s\gamma_1^{\frac{1}{\rho}} < n + g + \delta$ (le taux d'épargne n'est pas trop élevé).
2. Si $\rho < 0$ (les facteurs sont moins substituables que dans le cas Cobb-Douglas), alors alors l'unique état stationnaire $\hat{k}^{\star} > 0$ existe si et seulement si $s\gamma_1^{\frac{1}{\rho}} > n + g + \delta$ (le taux d'épargne n'est pas trop faible).
3. Si $\rho = 0$ alors la fonction de production est Cobb-Douglas, l'existence et l'unicité de l'état stationnaire sont assurées indépedamment des valeurs des paramètres.

Avec cette technologie on a les expressions suivantes du taux d'intérêt et de la part des revenus du capital dans le revenu total (en les écrivant en fonction de $\hat{y}(t)$) :

$$r\left(\hat{y}(t)\right) = \gamma_1^{\frac{1}{\rho}}\left(1 - \gamma_2\hat{y}(t)^{-\rho}\right)^{-\frac{1-\rho}{\rho}}$$

$$\alpha\left(\hat{y}(t)\right) = 1 - \gamma_2\hat{y}(t)^{-\rho}$$

2.3.6.1 Caractérisation de l'ajustement sans approximation

La vitesse de convergence est définie comme l'opposé du rapport de la dérivée du taux de croissance par rapport au temps sur le taux de croissance (*ie* le taux de croissance du taux de croissance). En rappelant que l'on a[4] :

$$g_{\hat{y}} = sf'\left(\hat{k}\right) - (n+g+\delta)\frac{f'\left(\hat{k}\right)\hat{k}}{\hat{y}}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\dot{g}_{\hat{y}} &= sf''\left(\hat{k}\right)\dot{\hat{k}} - (n+g+\delta)\frac{\left[f''\left(\hat{k}\right)\dot{\hat{k}}\hat{k} + f'\left(\hat{k}\right)\dot{\hat{k}}\right]\hat{y} - f'\left(\hat{k}\right)\hat{k}\dot{\hat{y}}}{\hat{y}^2} \\
\Leftrightarrow \dot{g}_{\hat{y}} &= sf''\left(\hat{k}\right)\dot{\hat{k}} - (n+g+\delta)\left[\frac{f''\left(\hat{k}\right)\dot{\hat{k}}\hat{k}}{\hat{y}} + \left(1-\alpha\left(\hat{k}\right)\right)\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}}\right] \\
\Leftrightarrow \dot{g}_{\hat{y}} &= -(n+g+\delta)\left(1-\alpha\left(\hat{k}\right)\right)g_{\hat{y}} + f''\left(\hat{k}\right)\dot{\hat{k}}\left[s - (n+g+\delta)\frac{\hat{k}}{\hat{y}}\right] \\
\Leftrightarrow \dot{g}_{\hat{y}} &= -(n+g+\delta)\left(1-\alpha\left(\hat{k}\right)\right)g_{\hat{y}} + \frac{f''\left(\hat{k}\right)\hat{k}}{f'\left(\hat{k}\right)}\frac{f'\left(\hat{k}\right)\hat{k}}{\hat{y}}g_{\hat{k}}\left[s\frac{\hat{y}}{\hat{k}} - (n+g+\delta)\right]
\end{aligned}$$

En notant que $g_{\hat{y}} = \alpha\left(\hat{k}\right)g_{\hat{k}}$, il vient :

$$\Leftrightarrow \dot{g}_{\hat{y}} = -(n+g+\delta)\left(1-\alpha\left(\hat{k}\right)\right)g_{\hat{y}} + \frac{f''\left(\hat{k}\right)\hat{k}}{f'\left(\hat{k}\right)}g_{\hat{y}}\left[s\frac{\hat{y}}{\hat{k}} - (n+g+\delta)\right]$$

[4]Afin d'alléger les notations on omet le temps, t.

Par définition on a :

$$\sigma\left(\hat{k}\right) = -\frac{f'\left(\hat{k}\right)\left[f\left(\hat{k}\right) - \hat{k}f'\left(\hat{k}\right)\right]}{\hat{k}f\left(\hat{k}\right)f''\left(\hat{k}\right)}$$

l'élasticité de substitution entre le capital et le travail, ou de façon équivalente :

$$\frac{\hat{k}f''\left(\hat{k}\right)}{f'\left(\hat{k}\right)} = -\frac{1-\alpha\left(\hat{k}\right)}{\sigma\left(\hat{k}\right)}$$

en toute généralité, on considère ici que l'élasticité de substitution entre les facteurs peut varier durant la transition. On a donc :

$$\Leftrightarrow \dot{g}_{\hat{y}} = -(n+g+\delta)\left(1-\alpha\left(\hat{k}\right)\right)g_{\hat{y}} - \frac{1-\alpha\left(\hat{k}\right)}{\sigma\left(\hat{k}\right)}g_{\hat{y}}\left[s\frac{\hat{y}}{\hat{k}} - (n+g+\delta)\right] + \frac{f''\left(\hat{k}\right)\hat{k}}{f'\left(\hat{k}\right)}g_{\hat{y}}\left[s\frac{\hat{y}}{\hat{k}} - (n+g+\delta)\right]$$

D'où la vitesse de convergence :

$$\beta(t) = (n+g+\delta)\left[1-\alpha\left(\hat{k}(t)\right)\right]\left\{1+\frac{1}{\sigma\left(\hat{k}\right)}\left(\frac{s}{n+g+\delta}\frac{\hat{y}(t)}{\hat{k}(t)} - 1\right)\right\}$$

En se rappelant de la définition, en termes des paramètres du modèle, du ratio $\hat{k}/\hat{y}$ à l'état stationnaire (2.3.7), il vient :

$$\beta(t) = (n+g+\delta)\left[1-\alpha\left(\hat{k}(t)\right)\right]\left\{1+\frac{1}{\sigma\left(\hat{k}\right)}\left(\frac{\hat{y}(t)/\hat{y}^*}{\hat{k}(t)/\hat{k}^*} - 1\right)\right\}$$

Dans le cas d'une technologie Cobb Douglas, lorsque l'élasticité de substitution est unitaire $\sigma(\hat{k}) = 1\ \forall\hat{k}$ on retrouve le résultat de Barro et Sala-i-Martin [1995, annexe du chapitre 1, page 60] :

$$\beta_1(t) = (n+g+\delta)\left[1-\alpha\right]\left\{\frac{\hat{y}(t)}{\hat{y}^*}\right\}^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} > 0$$

La vitesse de convergence diminue si et seulement si l'économie rejoint son état stationnaire par dessous (*ie*, $g_{\hat{y}} > 0$). A l'état stationnaire on retrouve bien le résultat standard (voir la section suivante, où nous calculons la vitesse de convergence en considérant une approximation de Taylor à l'ordre 1) : $\beta_1(t) \to \beta_1^* = (1-\alpha)(n+g+\delta)$.

Plus généralement, lorsque la fonction de production est de type CES ($\sigma(\hat{k}) = \sigma\ \forall\hat{k}$) on obtient l'expression suivante de la vitesse de convergence à l'instant t en fonction de $\hat{y}$ et $\hat{k}$:

$$\beta_\sigma(t) = (n+g+\delta)\left(1-\alpha\left(\hat{k}\right)\right)\left\{1+\frac{1}{\sigma}\left[\frac{\hat{y}}{\hat{k}}\frac{s}{n+g+\delta} - 1\right]\right\}$$

En exprimant $\hat{y}/\hat{k}$ en fonction de $\hat{y}$, on montre facilement que :

$$\frac{\hat{y}}{\hat{k}} = \gamma_1^{\frac{1}{\rho}}\alpha\left(\hat{y}(t)\right)^{-\frac{1}{\rho}}$$

En se rappelant de l'expression de la part du capital dans le produit à l'état stationnaire, on obtient finalement l'expressions suivante de la vitesse de convergence dans le cas de la fonction de production CES :

$$\beta_\sigma(t) = (n+g+\delta)\left[1-\alpha\left(\hat{y}(t)\right)\right]\left[1+\frac{1}{\sigma}\left\{\left(\frac{\alpha\left(\hat{y}(t)\right)}{\alpha^*}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}-1\right\}\right]$$

avec $\alpha\left(\hat{y}(t)\right) = 1-\gamma_2\hat{y}(t)^{-\rho}$. Le sens de variation de l'élasticité de la production par rapport au stock de capital physique dépend du signe de ρ. La part des revenus du capital dans le revenu total est une fonction croissante du produit par tête efficace si et seulement si $\rho > 0$, c'est-à-dire si et seulement si l'élasticité de substitution est plus forte que dans le cas Cobb-Douglas. Nous pouvons déterminer le sens de variation de la vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire en distinguant plusieurs cas :

1. Si $\hat{y}(t) < \hat{y}^\star$ et $\sigma > 1$, alors le produit par tête efficace augmente pendant la transition et la part des revenus du capital augmente, ce qui se traduit par une baisse de la vitesse d'ajustement.
2. Si $\hat{y}(t) < \hat{y}^\star$ et $\sigma < 1$, alors le produit par tête efficace augmente pendant la transition et la part des revenus du capital diminue, ce qui se traduit par une augmentation de la vitesse d'ajustement.
3. Si $\hat{y}(t) > \hat{y}^\star$ et $\sigma > 1$, alors le produit par tête efficace diminue pendant la transition et la part des revenus du capital diminue, ce qui se traduit par une augmentation de la vitesse d'ajustement.
4. Si $\hat{y}(t) > \hat{y}^\star$ et $\sigma < 1$, alors le produit par tête efficace diminue pendant la transition et la part des revenus du capital augmente, ce qui se traduit par une baisse de la vitesse d'ajustement.

On retient que la vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire n'est pas constante, mais change le long de la transition. Le sens de variation dépend de la position initiale vis-à-vis de l'état stationnaire **et** de la valeur de l'élasticité de substitution entre les facteurs. Si on connaît σ on peut inférer la position initiale de l'économie relativement à l'état stationnaire en observant l'évolution de la vitesse de convergence.

Dans cette section nous n'avons pas résolu d'équation différentielle, pour, par exemple, calculer le niveau du produit par tête efficace à l'instant t. Cela n'est généralement pas possible [5] et il faut alors recourir à une approche numérique ou considérer une approximation de l'équation différentielle. Notons néanmoins que, sans même chercher à résoudre l'équation différentielle, nous avons pu apprendre des choses relativement précises sur la dynamique de transition vers l'état stationnaire.

2.3.6.2 Caractérisation de l'ajustement avec une linéarisation de la dynamique

Rappelons que le taux de croissance du produit par tête efficace est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}\log\hat{y}}{\mathrm{d}t} = sr\left(\hat{k}(t)\right)-(n+g+\delta)\alpha\left(\hat{k}(t)\right)$$

[5] Sauf pour certaines fonctions de production. Dans le cas d'une technologie Cobb-Douglas ou Léontieff il est possible de mener les calculs jusqu'au bout.

On peut montrer que la log-linéarisation de cette dynamique dans un voisinage de $\hat{k}^\star$, conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\log \hat{y}(t)}{\mathrm{d}t} \approx -\beta \log \frac{\hat{y}(t)}{\hat{y}^*}$$

avec

$$\beta = (n+g+\delta)\left[1-\gamma_1\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\rho}\right] = (n+g+\delta)(1-\alpha^*)$$

dans le cas d'une fonction de production CES.

Preuve : Notons $\varphi(\hat{k}) \equiv sr\left(\hat{k}\right) - (n+g+\delta)\alpha\left(\hat{k}\right)$. En considérant un développement de Taylor à l'ordre dans un voisinage de l'état stationnaire, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\log \hat{y}(t)}{\mathrm{d}t} \approx \varphi'(\hat{k}^\star)(\hat{k}-\hat{k}^\star)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\varphi'(\hat{k}^\star) &= sr'\left(\hat{k}^\star\right) - (n+g+\delta)\alpha'\left(\hat{k}^\star\right) \\
&= sf''(\hat{k}^\star) - (n+g+\delta)\frac{\left(\hat{k}^\star f''(\hat{k}^\star) + f'(\hat{k}^\star)\right)\hat{y}^\star - \hat{k}^\star f'(\hat{k}^\star)^2}{\hat{y}^{\star\,2}} \\
&= sf''(\hat{k}^\star) - (n+g+\delta)\left[\frac{\hat{k}^\star}{\hat{y}^\star}f''(\hat{k}^\star) + \left(1-\alpha(\hat{k}^\star)\right)\frac{f'(\hat{k}^\star)}{\hat{y}^\star}\right] \\
&= sf''(\hat{k}^\star) - (n+g+\delta)\frac{f'(\hat{k}^\star)}{\hat{y}^\star}\left[\frac{\hat{k}^\star f''(\hat{k}^\star)}{f'(\hat{k}^\star)} + \left(1-\alpha(\hat{k}^\star)\right)\right] \\
&= sf''(\hat{k}^\star) - (n+g+\delta)\frac{f'(\hat{k}^\star)}{\hat{y}^\star}\left[\left(1-\alpha(\hat{k}^\star)\right) - \frac{1-\alpha(\hat{k}^\star)}{\sigma(\hat{k}^\star)}\right] \\
&= sf''(\hat{k}^\star) - (n+g+\delta)\frac{f'(\hat{k}^\star)}{\hat{y}^\star}\left(1-\alpha(\hat{k}^\star)\right)\left[1-\frac{1}{\sigma(\hat{k}^\star)}\right]
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (2.3.7) pour exprimer s en fonction du ratio capital–produit à l'état stationnaire, il vient :

$$\varphi'(\hat{k}^\star) = (n+g+\delta)\frac{\hat{k}^\star}{\hat{y}^\star}f''(\hat{k}^\star) - (n+g+\delta)\frac{f'(\hat{k}^\star)}{\hat{y}^\star}\left(1-\alpha(\hat{k}^\star)\right)\left[1-\frac{1}{\sigma(\hat{k}^\star)}\right]$$

soit encore en factorisant :

$$\varphi'(\hat{k}^\star) = (n+g+\delta)\frac{f'(\hat{k}^\star)}{\hat{y}^\star}\left[\frac{\hat{k}^\star f''(\hat{k}^\star)}{f'(\hat{k}^\star)} - \left(1-\alpha(\hat{k}^\star)\right)\left(1-\frac{1}{\sigma(\hat{k}^\star)}\right)\right]$$

et par définition de l'élasticité de substitution :

$$\varphi'(\hat{k}^\star) = -(n+g+\delta)\left(1-\alpha(\hat{k}^\star)\right)\frac{f'(\hat{k}^\star)}{\hat{y}^\star}$$

En substituant dans l'expression de l'approximation du taux de croissance du produit par tête efficace, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\log \hat{y}(t)}{\mathrm{d}t} \approx -(n+g+\delta)\left(1-\alpha(\hat{k}^\star)\right)\frac{f'(\hat{k}^\star)}{\hat{y}^\star}(\hat{k}-\hat{k}^\star)$$

soit de façon équivalente :

$$\frac{\mathrm{d}\log \hat{y}(t)}{\mathrm{d}t} \approx -(n+g+\delta)\left(1-\alpha(\hat{k}^{\star})\right)\alpha(\hat{k}^{\star})\frac{\hat{k}-\hat{k}^{\star}}{\hat{k}^{\star}}$$

En notant, par ailleurs, que l'on a :

$$\log f(\hat{k}) \approx \log f(\hat{k}^{\star}) + \frac{f'(\hat{k}^{\star})}{f(\hat{k}^{\star})}\left(\hat{k}-\hat{k}^{\star}\right)$$

et par définition de l'élasticité du produit par rapport au capital :

$$\log f(\hat{k}) - \log f(\hat{k}^{\star}) \approx \alpha(\hat{k}^{\star})\frac{\hat{k}-\hat{k}^{\star}}{\hat{k}^{\star}}$$

soit encore :

$$\log\frac{\hat{y}}{\hat{y}^{\star}} \approx \alpha(\hat{k}^{\star})\frac{\hat{k}-\hat{k}^{\star}}{\hat{k}^{\star}}$$

Ainsi, nous avons finalement :

$$\frac{\mathrm{d}\log \hat{y}(t)}{\mathrm{d}t} \approx -(n+g+\delta)\left(1-\alpha(\hat{k}^{\star})\right)\log\frac{\hat{y}(t)}{\hat{y}^{\star}}$$

Il s'agit bien du résultat annoncé plus haut. □

En considérant un développement de Taylor d'ordre un autour de l'état stationnaire, nous perdons de l'information sur la dynamique de transition. En effet, ici la vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire est constante. On note néanmoins que la vitesse de convergence obtenue ici est la limite lorsque t tend vers l'infini de la vitesse de convergence obtenue dans la section précédente (cette équivalence asymptotique n'est pas étonnante puisque la stabilité de l'état stationnaire nous assure que lorsque t devient assez grand le produit par tête se trouve arbitrairement proche de l'état stationnaire). Remarquons enfin que nous avons pu «dérouler les calculs» sans spécifier la fonction de production (c'est généralement le cas lorsque l'on considère une approximation du modèle).

Nous avons perdu une partie des propriétés de la transition, mais nous pouvons maintenant résoudre la dynamique, c'est-à-dire calculer le niveau du produit par tête efficace à un instant quelconque. Évidemment cette résolution ne sera valable que localement dans un voisinage de l'état stationnaire autour duquel nous avons linéarisé la dynamique. Notons $z(t) \equiv \log\frac{\hat{y}(t)}{\hat{y}^{\star}}$ la distance à l'état stationnaire. On montre facilement que :

$$\dot{z}(t) = -\beta(\hat{k}^{\star})z(t)$$

Cette équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficient constant nous dit que le taux de croissance de la distance à l'état stationnaire est négatif et constant. La résolution est directe, nous avons :

$$z(t) = z(0)e^{-\beta(\hat{k}^{\star})t}$$

Pour toute condition initiale, la distance à l'état stationnaire se résorbe en un temps infini. La vitesse de l'ajustement vers l'état stationnaire est définie par $\beta(\hat{k}^\star)$. Finalement, en substituant la définition de l'écart à l'état stationnaire, on obtient :

$$\hat{y}(t) = \hat{y}^{\star\,\omega(t)}\,\hat{y}(0)^{1-\omega(t)}$$

avec $0 \leq \omega(t) = 1 - e^{-\beta(\hat{k}^\star)t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

2.3.6.3 Caractérisation de l'ajustement avec une approximation à l'ordre 2

Nous considérons maintenant une approximation de Taylor à l'ordre deux de la dynamique du produit par tête efficace. Nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}\log\hat{y}(t)}{\mathrm{d}t} \approx \varphi'(\hat{k}^\star)(\hat{k}-\hat{k}^\star) + \frac{1}{2}\varphi''(\hat{k}^\star)(\hat{k}-\hat{k}^\star)^2$$

En conservant les notations de la section précédente. Nous avons :

$$\varphi'(\hat{k}^\star) = -(n+g+\delta)\left(1-\alpha(\hat{k}^\star)\right)\frac{f'(\hat{k}^\star)}{\hat{y}^\star}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi''(\hat{k}) &= sf'''(\hat{k})\\ &-(n+g+\delta)\frac{\left\{\left[f''(\hat{k})+f''(\hat{k})+\hat{k}f'''(\hat{k})\right]f(\hat{k})+\left[f'(\hat{k})+\hat{k}f''(\hat{k})\right]f'(\hat{k})-\hat{k}f''(\hat{k})-f'(\hat{k})\right\}f(\hat{k})^2+2f'(\hat{k})\left\{\left[f'(\hat{k})+\hat{k}f''(\hat{k})\right]f(\hat{k})-\hat{k}f(\hat{k})\right\}}{f(\hat{k})^4}\end{aligned}$$

En notant $T()$ l'opérateur qui sélectionne les termes contenant des dérivées tierce de f, il vient après simplifications :

$$T\left(\varphi''(\hat{k})\right) = sf'''(\hat{k}) - (n+g+\delta)\frac{\hat{k}}{f(\hat{k})}f'''(\hat{k})$$

En notant, voir l'équation (2.3.7), que $T\left(\varphi''(\hat{k}^\star)\right) = 0$ et sachant que *in fine* nous souhaitons évaluer φ'' à l'état stationnaire, nous pouvons éliminer les termes où apparaissent les dérivées tierce de f. Nous avons donc[6] :

$$\varphi''(\hat{k}) = -(n+g+\delta)\frac{\left\{2f''(\hat{k})f(\hat{k})+\left[f'(\hat{k})+\hat{k}f''(\hat{k})\right]f'(\hat{k})-\hat{k}f''(\hat{k})-f'(\hat{k})\right\}f(\hat{k})^2+2f'(\hat{k})\left\{\left[f'(\hat{k})+\hat{k}f''(\hat{k})\right]f(\hat{k})-\hat{k}f(\hat{k})\right\}}{f(\hat{k})^4}$$

$$\Leftrightarrow \varphi''(\hat{k}) = -(n+g+\delta)\frac{\left\{2f''(\hat{k})f(\hat{k})+\left[f'(\hat{k})+\hat{k}f''(\hat{k})\right]\left[f'(\hat{k})-1\right]\right\}f(\hat{k})^2+2f'(\hat{k})\left\{\left[f'(\hat{k})+\hat{k}f''(\hat{k})\right]f(\hat{k})-\hat{k}f(\hat{k})\right\}}{f(\hat{k})^4}$$

Ainsi, il doit être possible d'écrire cette dérivée seconde en faisant apparaître l'élasticité du produit par rapport au capital et l'élasticité de substitution entre les facteurs. Après quelques calculs fastidieux (en développant et en faisant apparaître l'élasticité du produit par rapport au capital et l'élasticité de substitution entre les facteurs) :

$$\varphi''(\hat{k}) = -\left(\frac{\alpha(\hat{k})}{\hat{k}}\right)^2(n+g+\delta)(1-\alpha(\hat{k}))\left\{\frac{1}{\sigma(\hat{k})}\frac{\hat{k}(1-\alpha(\hat{k}))-2\hat{y}-2\alpha(\hat{k})}{\alpha(\hat{k})\hat{y}} + \frac{\hat{y}+2-\frac{2}{\alpha(\hat{k})}}{(1-\alpha(\hat{k}))\hat{y}}\right\}$$

[6]Il y a un abus de notations ici. L'égalité suivante n'est correcte qu'à l'état stationnaire. En dehors de l'état stationnaire les dérivées tierce ne se simplifient pas. Cet abus me permet d'alléger les notations en omettant les étoiles sur les variables.